# 旅行時間の不確実性を考慮した交通ネットワーク均衡：正規分布を用いた確率ネットワーク均衡モデル

○中山晶一朗（正会員・金沢大学），高山純一（正会員・金沢大学）

## 1. はじめに

日々の交通行動の中で，通勤や業務など到着制約のあるトリップは多く，また，緊急車両など単に早く目的地に到着できるだけでなく，どれほど「確実」に到着できるのかを求められる場面も多い．また，ITSやVICSの効果を分析する場合，情報提供は不確実な状況下にこそ意味があるため，不確実性を的確に計測・評価することは不可欠である．このように道路ネットワークに関しては，旅行時間（所要時間）の値そのものだけでなく，そのばらつきはどれほどかを把握することは極めて重要なことと言える．

交通ネットワークの分析としては，従来からワードロップ均衡モデルや確率的利用者均衡モデルが用いられてきた．確率的利用者均衡はランダム効用理論に基づいた経路選択による交通ネットワーク均衡であるが，その確率的利用者均衡という名称に反し，確定的な交通量および旅行時間を求めるものであり，交通量や旅行時間を陽に確率的には取り扱っていない．ただ，ランダム効用理論から算出される選択確率の割合に交通量を（確定的に）配分しているだけである．また，経路選択の際のランダム項は，経路の長さにかかわらずその分散は変化しないため，それが旅行時間の不確実性を表していると解釈することには，理論上の問題が生じる．そのランダム項は，観測不能な要因や人間の知覚誤差などと解釈されるべきものであろう．このように確率的利用者均衡は，既に述べたような旅行時間の不確実性を考慮した交通量配分を行うものではないと言える．

そこで，本研究では，交通量や旅行時間を確率変数として扱い，旅行時間の不確実性を考慮できる交通ネットワーク均衡を提案する．

## 2. 基本概念

ワードロップ均衡の基本的な考え方は，利用される経路の旅行時間は皆等しく，利用されない経路の旅行時間よりも小さいかせいぜい等しいというものである．交通量や旅行時間を確率変数と考え，このワードロップ均衡の考え方を適用すると，利用される経路の「期待旅行時間（期待効用）」は皆等しく，利用されない経路の「期待旅行時間（期待効用）」よりも小さいかせいぜい等しい，という均衡を考えることは極めて自然なことである．これが本均衡モデルの基本的な考え方である．この時，期待旅行時間の代わりに効用の期待値や一般化費用の期待値を用いることも当然可能となる．

## 3. 交通量の確率分布

本研究では，道路利用者は確率的に経路を選択すると仮定する．この時，$N^i$人が存在するODペア$i$（$\in U$）の利用者が経路$k$（$\in K^i$）を確率$p_k^i$で選択すると，経路$k$の（そのODペア$i$に関する）経路交通量は二項分布$\mathrm{Bin}(N^i, p_k^i)$に従う（経路全てのうちどの経路を選択するのかで見た場合は多項分布に従う）．このように経路交通量が確率変数であると，経路旅行時間も当然確率変数となる．ただし，ここでは，同一ODペア全員が同じ確率で経路を選択すると仮定する．本稿では厳密には示さないが，もし異なる確率で経路を選択するものがいれば，どちらかの期待旅行時間の方が小さくなるはずであり，上で示した本モデルの基本概念に反することになる．

一般に二項分布は正規分布で近似出来るように，ODペアの人数$N^i$人が十分に大きい場合，二項分布$\mathrm{Bin}(N^i, p_k^i)$に従う経路交通量は正規分布$\mathrm{N}[N \cdot p_k^i, N \cdot p_k^i \cdot (1 - p_k^i)]$で近似することが可能である．ここで，経路$k$の交通量の平均を$\mu_k^i$とすると，経路交通量が従う正規分布は$\mathrm{N}[\mu_k^i, \mu_k^i \cdot (1-\mu_k^i/N^i)]$と表される．

$\delta_{a,k}$をリンク$a$が経路$k$に含まれている場合は1をとり，含まれていない場合は0になる変数とする．ODペア$i$の交通需要のみのリンク$a$の交通量（ODペア$i$のみの交通がリンク$a$を通過する量）は平均が$\sum_{k \in K^i} \delta_{a,k} \cdot \mu_k \left(\equiv \mu_a^i\right)$，分散が$\mu_a^i \cdot (1-\mu_a^i/N^i)$の正規分布と

なる. このODペア $i$ の交通のみのリンク $a$ の交通量を確率変数 $X_a^i$ とすることにする.

前段落ではある1つのODペアの交通がリンク $a$ を通過する量についてのべたが, 通常, リンク $a$ の交通量は, 全てのODペアの交通で, リンク $a$ を走行する量である. 異なったODペア $i$ の交通のみのリンク $a$ の交通量 $X_a^i$ は独立な正規分布に従うため, リンク $a$ の交通量の確率変数 $X_a = \Sigma_i X_a^i$ も正規分布に従う. その正規分布の平均 $\mu_a$ は $\Sigma_i \mu_a^i = (\Sigma_i)\Sigma_{k\in K} \delta_{a\,k} \cdot \mu_k^i$ であり, 分散は $\Sigma_i \mu_a^i \cdot (1-\mu_a^i/N^i)$ である.

## 4. 期待旅行時間の算出

リンク走行時間がBPR関数に従うと仮定とすると, リンクの旅行時間 $t_a$ は $\alpha + \beta x^n$ で表される. ただし, $x$ は交通量である. したがって, 期待リンク旅行時間を計算するためには $E[X^n]$ が計算できれば良い. ここで, $E[\cdot]$ は期待値であり, $X$ は交通量の確率変数である. $E[X^n]$ の計算には積率母関数を用いることができる.

積率母関数の性質から $E[(X_a)^n]$ は $\left.\frac{d^n M_a(s)}{ds^n}\right|_{s=0}$ として計算される. 前節で述べたように交通量は正規分布に従うため, $X_a$ は正規変数であり, その積率母関数 $M_a(s)$ は $\exp(\mu s + \sigma^2 s^2/2)$ である. ただし, $\mu$ は正規分布の平均, $\sigma^2$ はその分散である. BPR関数の場合, リンク旅行時間の期待値は以下の式となる.

$$E[T_a] = \alpha + \beta \cdot \left.\frac{d^n M_a(s)}{ds^n}\right|_{s=0} \tag{1}$$

ただし, $T_a$ はリンク旅行時間の確率変数である. したがって, 経路旅行時間の期待値 $E[T_k^i]$ は $\Sigma_a \delta_{a,k} \cdot E[T_a]$ となる. また, 紙面の都合上省略するが, 共分散 $Cov[T_a, T_a]$ も積率母関数を用いて計算することができ, 経路 $k$ の旅行時間の分散 $Var[T_k^i]$ も以下の式のように計算できる.

$$Var[T_k^i] = \Sigma_a \delta_{a,k} \cdot Var[T_a] + \Sigma_a \Sigma_{a',\, a\neq a'} \delta_{a,k} \cdot \delta_{a',k} \cdot Cov[T_a, T_a] \tag{2}$$

## 5. 定式化

前節までに述べたように経路選択を確率的に行うとき, 実現される交通ネットワークの状態は以下のように表現できる.

$$E[T_k^i] = \lambda^i \quad \text{if } \mu_k^i > 0 \quad \forall k \in K^i\ \forall i \in U \tag{3}$$

$$E[T_k^i] \geq \lambda^i \quad \text{if } \mu_k^i = 0 \quad \forall k \in K^i\ \forall i \in U \tag{4}$$

ここで, $E[\cdot]$ は期待値であり, $T_k^i$ はODペア $i$ の経路 $k$ の旅行時間(確率変数), $\lambda^i$ はODペア $i$ の最短の期待旅行時間である.

上式は相補性問題, 変分不等式問題, 不動点問題として定式化できる. 変分不等式は以下の通りである.

$$\text{Determine } \mathbf{X}^* = (\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in \Omega$$
$$\text{Such that } \mathbf{F}[\mathbf{X}^*] \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}^*) \geq 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega \tag{5}$$

ここで, $\mathbf{F}[\mathbf{X}] = (\mathbf{E}[\mathbf{T}(\boldsymbol{\mu})] - \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Gamma\mu} - \mathbf{I})$, $\mathbf{E}[\mathbf{T}]$ は経路の期待旅行時間ベクトル, $\boldsymbol{\mu}$ は経路交通量の平均のベクトル, $\boldsymbol{\lambda}$ は経路の最短期待旅行時間のベクトル, $\boldsymbol{\Gamma}$ は経路とODペアの接続行列, $\mathbf{I}$ は単位ベクトルである. また, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ はベクトルの内積を表し, T は転置である.

## 6. 数値計算

1OD3リンクの単純なネットワークに上述の確率ネットワーク均衡を適用した. リンク走行時間関数にはBPR関数($\alpha = 1.0, \beta = 2$)を用い, リンク1の自由走行時間および交通容量は10分および1000台, リンク2は15分および1500台, リンク3は20分および2000台とした. また, OD交通量は4500台とした.

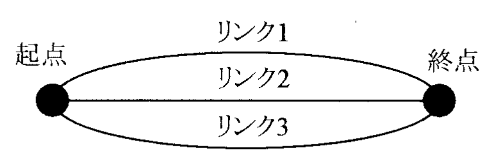


図1 数値計算のネットワーク

計算結果は表1の通りとなった.

表1 各リンクの交通量の平均と分散

| | リンク1 | リンク2 | リンク3 |
|---|---|---|---|
| 平均 | 1453.26 | 1555.12 | 1491.61 |
| 分散 | 983.94 | 1017.70 | 997.19 |

## 7. おわりに

本研究では, 交通量及び旅行時間を正規分布とした, 旅行時間の不確実性を考慮する交通ネットワーク均衡を提案した. 今後, 大規模ネットワークでの計算アルゴリズムの開発などが課題である.