モンテカルロシュミレーションを用いた信頼性解析によるコードキャリブレーションに関する考察

岐阜大学　○大西教文
岐阜大学　本城勇介
岐阜大学　Shailendra Amataya

1. 背景と目的

今日のわが国は従来の許容応力度設計から、部分係数を用いた限界状態設計法に書き換えられようとしている。この方法はレベル1法と呼ばれ、構造物と荷重に関する主な変数の特性値にかかる幾つかの、部分係数を用いて、それらに適当な構造信頼性を与える設計法である。この部分係数を決定する作業のことをコードキャリブレーションという。

従来信頼性設計法に基づいたコードキャリブレーションの方法として広く用いられてきたのは、一次近似信頼性法(FORM)に基づく設計値法であった。この方法では、FORMにより求められた信頼性指標βを指標として、まずキャリブレーションの目標信頼性指標β_Tを定め、設計値法の考え方に基づき、各基本変数の設計値(特性値を部分係数で除した値)と、設計点における値の距離を、正規化空間で等距離になるように部分係数を設定する。一つの合理的な判断である。

しかしこの方法の欠点は、性能関数が非線形である場合(地盤工学のほとんどの設計式はこの場合に当てはまる)、また基本変数の従う確率分布が極値分布など著しく正規分布と異なる分布に従う場合などに、計算されるβが、著しく真値と異なる場合があることである。

一方モンテカルロシミュレーション(MCS)は、計算時間はかかるものの、上記のようなFORMの欠点はなく、どのような問題にも対応できる。またImportance Sampling(ImS)など、MCSの計算時間を著しく改善する方法も開発されている。しかしこの方法では、設計値法の適用で欠かせない感度係数を求めることができない。本研究はこれを、生成されたデータから回帰分析を行うことにより求める方法を提案し、その適用性を簡単な例題で、ImSを用いたケースも含めて、確かめた。

2. 設計値法

設計値法の基本的な考え方を、性能関数が$Z=aR-bS$で与えられる、簡単な場合を例として説明する。この例題では、$R\sim N(\mu_R,\sigma_R^2)$、$S\sim N(\mu_S,\sigma_S^2)$とし、RとSの特性値は、その平均値を取るものとする。

周知のように、この性能関数で計算される信頼性指標βは、次のように与えられる。

$$\beta = a\mu_R - b\mu_S \,/\, \sqrt{a^2\sigma_R^2 + b^2\sigma_S^2}$$

今このβを、目標信頼性設計指標β_Tより大きくなるように、部分係数を設定したいので、

$$a\mu_R - b\mu_S \geq \beta_T(\alpha_R a\sigma_R + \alpha_S a\sigma_S)$$

ただし、$\alpha_R = a\sigma_R / \sigma_Z$, $\alpha_S = b\sigma_S / \sigma_Z$

α_Rとα_Sは、感度係数と言われるもので、正規化空間で平均値から設計点へ向かう単位ベクトルである。従って、これはRとSが正規化された空間で1単位変化したときのβの変化（感度）を表す。この式を変形すると、次の関係が得られる。

$$a\mu_R - a\beta_T\alpha_R\sigma_R \geq b\mu_S + b\beta_T\alpha_S\sigma_S$$

$$a\mu_R(1-\beta_T\alpha_R\frac{\sigma_R}{\mu_R}) \geq b\mu_S(1+\beta_T\alpha_S\frac{\sigma_S}{\mu_S})$$

以上の結果より、設計値法によれば、RとSの部分係数γ_Rとγ_Sを次のように定義すると合理的であることがわかる。

$$a\gamma_R\mu_R \geq b\gamma_S\mu_S, \quad where \quad \gamma_R = (1-\beta_T\alpha_R\frac{\sigma_R}{\mu_R}), \quad \gamma_S = (1+\beta_T\alpha_S\frac{\sigma_S}{\mu_S})$$

以上の手続きをへて、β_Tを目標信頼性指標とするレベルIの設計式を得ることができる。

3. MCSによる破壊確率と感度係数の算定

モンテカルロシミュレーション(MCS)により、破壊確率を算定する方法は次の通りである。

$$P_F = \int I\left[g(x) \leq 0\right] f(x)dx$$

ここに、Iはインジケータ関数、$g(x)$は性能関数、$f(x)$は基本変数ベクトルxの同時確率密度関数である。破壊確率 PF の算定を効率的に行う一つの方法に

ImS がある.この方法は次のように表記される。

$$P_F = \int I[g(x) \leq 0]\{f(x)/h(x)\}h(x)dx$$

ここに、h(x)は ImS 関数であり、設計点付近で大量のサンプル点を生成できれば、効率的な破壊確率の算定が可能である。

一方感度係数は、MCS、ImS いずれの場合も、生成されたサンプル点の集合(r_i,s_i) (i=1...N)を、そのときの安全性余裕 z_i に対して線形回帰したとき、その回帰係数を正規化した値として求められる。

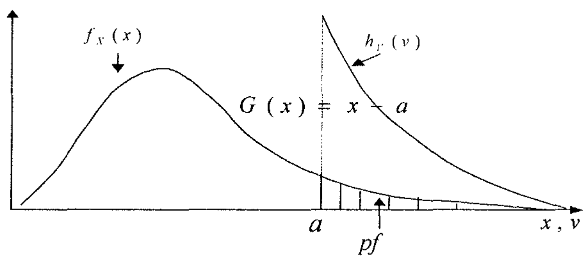

図 1 Importance 関数概念図

3.2 任意の分布に従う乱数の発生

任意の分布の累積分布関数をF_X（x）、一様分布の累積分布関数をF_U（u）とおくと、

F_X（x）＝F_U（u）このとき、xは、逆変換により x＝F_X^{-1}（u）したがって、uに一様乱数を与えることにより、任意の累積分布関数F_X（x）を持つランダム変数 x を発生させることができる。

4．　ＭＣＳを用いたデータ解析例と考察

例題１、ＲとＳの性能関数をＺ＝Ｒ－Ｓとおく。そこで、ＲとＳのそれぞれの値を R～N(7.0, 1.0)、S～N(3.0, 1.0)、の正規分布に従うとし、乱数を発生させる。ＲとＳは互いに独立であるとすると、

Ｚ～N(4.0, 2)となることから、P_F＝0.002401 の感度係数の理論値はα_R＝0.707　α_S＝－0.707 となる。ＭＣＳとＩＭＳによりサンプル値についての回帰分析より求められた感度係数を算出した。ImS はh_R～N (5.0, 1.0)，h_S～N (5.0, 1.0) とした。MCS、ImS で求めた感度係数の値を表－１に示す。

例題２、性能関数を Z=2R－S とし、Ｒ と Ｓ の値を R～N(3.7889, 1.0)、S～N(3.1056, 1.0)の正規分布に従うように発生させた。Ｚ～N(4.4722 , 5)となることから、P_F＝0.02275 の感度係数の理論値はα_R=0.894、α_S=－0.447 となる。ImS のＲとＳの値はh_R～N（2.0, 1.0），h_S～N（4.0, 1.0）とし、求めた感度係数の値を表２に示した。

	解析法	P_F	α_R	α_S
1000個発生	MCS	3.00E-03	0.707	-0.707
	IMS	2.45E-03	0.707	-0.707
10000個発生	MCS	2.10E-03	0.707	-0.707
	IMS	2.35E-03	0.707	-0.707

表１　R～N 例題１の結果

	解析法	P_F	α_R	α_S
1000個発生	MCS	2.30E-02	0.894	0.010
	IMS	2.21E-02	0.894	0.010
10000個発生	MCS	2.31E-02	0.894	0.010
	IMS	2.27E-02	0.894	0.010

表２　例題２の結果

表１、表２に示したとうり、ともにＲとＳの値をそれぞれ 1000 個、10000 個発生させ、ＭＣＳ、ImS により感度係数を求めた結果、理論値と等しい値が得られた。したがって、基本変数の値が互いに独立のとき、任意の確率分布関数にしたがって生成されたデータから回帰分析を行う方法は、感度係数の算定に適用できるということが分かる。

また、ＭＣＳ、ImS の解析の結果、得られた感度係数の値が等しくなった。そして、ImS の方が早く真値に収束していることが分かる。このことから３で述べたように、ＩＭＳはＭＣＳに比べ少ないシュミレーション回数で、精度の高い結果が得られることが出来たので、ImS の有用性が確認できた。

5．　むすび

紙面の制約上、ここでは非常に簡単な場合について本研究で提案した方法を適用した場合について示すことが出来なかった。よって、より複雑で、実際的な問題に本方法を適用したケースについて、発表時に紹介する。

参考文献

1）　高山　智博（2001）モンテカルロシュミレーションを用いた基礎構造物の信頼性解析

2）　P. トフークリステンセン/M. J. ベイカー　室津　義定訳構造信頼性—理論と応用

3）村田　知恵（2001）杭基礎の信頼性解析による部分係数のキャリブレーション