# 地盤のような確率場の自己相関距離の同定

岐阜大学工学部　　　曽我　由孝、本城　勇介

## 1．序論

・背景

地盤工学の問題で、地盤に関する様々なパラメータを確率場としてとらえ、地盤を確率場によって記述しようという試みが行われている。確率場が定常であるという過程のもとで必要となるのは、次の 3 つのパラメータである。

平均：$\mu_z$　　分散：$\sigma_z^2$　　自己相関関数：$p_Z$

一般的な確率論的な考え方の普及により、平均・分散については広く認識されるようになったが、自己相関関数の理解は、まだ一般的であるとは言えない。

・目的

与えられた 1 次元確率場のデータより、自己相関関数を推定する方法の違いによる精度の差と、サンプル個数や間隔の関係について、数値実験により考察を行う。次の 3 つの推定法を比較する。

① 一般的な相関係数の計算法

② 最尤推定法(AIC)

③ 拡張ベイズ推定法(ABIC)

・方法

(ⅰ)サンプルの個数・サンプルの間隔・自己相関距離の設定

(ⅱ)設定した条件に従った乱数の発生(各ケース 1000 個ずつ発生)

◎ケース設定◎

それぞれの推定法の比較を行うため、次のようなケースについて、乱数によってサンプル関数を生成した。

・サンプルの個数($n$)は、10 , 25 , 50 の 3 ケースを考えた。

・サンプル間隔については、これを自己相関距離で正規化し、$\Delta x/c$ としてケースを設定。設定した $\Delta x/c$ は、0.1 , 0.3 , 0.5 , 0.7 , 1.0 , 1.5 , 2.0 , 3.0 , 4.0 , 5.0 の 10 ケースである。

以上の $n$ と $\Delta x/c$ の組み合わせで、全 50 ケースについて自己相関距離を推定する。ただし ABIC を用いた推定では、サンプルの少ない場合にのみ興味があるので、$n$=10 , 25 , 50 のケースのみを取り上げ、全 30 ケースとした。それぞれのケースについて 1000 回づつ計算し、その結果の平均と標準偏差を調べることにより、それぞれの方法を評価する。

(ⅲ)AIC による自己相関距離の推定

(ⅳ)ABIC による自己相関距離の推定

(ⅴ)全体の考察と結論

## 2. 推定法の説明

①一般的な自己相関係数の推定

データ $z_1, z_2, \cdots, z_n$ が時間的に観測されたものであるとき、これらを一般的に時系列という。$i$ 時点の $z_i$ が大きければ $j$ 時点(ただし $i<j$)の $z_j$ は大きくなる(あるいは小さくなる)という関係を分析することが基本にある。このように、同じ $z$ でも系列の異時点間の相関関係を表すのが、自己相関係数である。

②赤池情報処理規準(AIC)

AIC を用いた推定(最尤推定)では、次の尤度関数を最大にする $\theta$ を $\hat{\theta}$ とする。$y$ は観測値ベクトル。

$$L_1(\theta) = f(y \mid \theta)$$

良質なデータ $\{y_i\}$ が大量に与えられている時、尤度関数は明確で安定した $\hat{\theta}$ を与え、$\hat{\theta}$ の推定は容易である。

③最良の予測分布をえるための仕組みとしてのベイズ推定

ABIC を用いた推定(拡張ベイズ推定)では、次のような関数の最大化を計る。

$$L_2(\theta) = \int f(y \mid \theta) p(\theta \mid \lambda) d\theta = \int L_1(\theta) p(\theta \mid \lambda) d\theta$$

実際の $p(\theta \mid \bar{\lambda})$ のパラメータ $\lambda$ は、$\mu_\theta$ 及び $\sigma_\theta^2$ である。このことより、$L_1(\theta)$ に事前分布 $p(\theta \mid \mu_\theta, \sigma_\theta^2)$ をかけて $\theta$ について積分し、最大の $L_2$ を与える $(\mu_\theta, \sigma_\theta^2)$ の組み合わせを探し、このときの $\mu_\theta$ が $\theta$ のベイズ推定量となる。

拡張ベイズ推定は、$\theta$ の尤度関数 $L_1(\theta)$ を、$p(\theta \mid \mu_\theta, \sigma_\theta^2)$ によって重み付け積分することを意味している。これは、$L_1(\theta)$ が少量のデータに基づいて求められている場合不安定であり、良い $\theta$ の推定値を与えないため、この尤度関数に含まれる有用な情報を最大限の「情報を抽出するための仕組み」を提供しているといえる。もちろんこの手の込んだ仕組みのため、$L_2$ の計算量は $L_1$ に比べてかなり大量になる。

### 3.　推定結果と考察

①一般的な自己相関係数の推定

ケース 100 や 200 の場合には、$\Delta x/c$ が 0.5 程度までは、相関係数より自己相関距離が推定できるといえる。しかし、サンプル個数が少ない 10 や 25 のケースの場合には、サンプル間隔に関係なく自己相関距離の推定は不可能であった。

②AIC と ABIC を用いた自己相関係数の推定

図－1 に AIC 及び ABIC を用いて、サンプル数 n=10,25,50 個の場合に、サンプル間隔 $\triangle x/\theta$ = 0.1,0.3,0.5,0.7,1.0,1.5,2.0,3.0,4.0,5.0 のとき 1000 回づつの推定を行った場合の結果を示した。縦軸には $\theta$ の推定値/$\theta$ の真値をとり、推定の精度を示した。この図の次のことが言える。

(1)　ABIC による推定結果は、AIC によるそれに比べ特に $\Delta x/\theta$ が 0.7 より小さい、または 3 より大きい時に信頼できる結果を与えている。すなわち推定値の標準偏差が小さくなっている。

(2)　上記のことは特にサンプル数が少ない場合(n=10 や 25)のときより顕著である。

(3)　n=50 のとき、両者に著しい差はない。

ただし、$\Delta x/\theta$ が大きい時、ABIC による推定値は AIC のそれより偏差が大きいことに注意する必要がある。

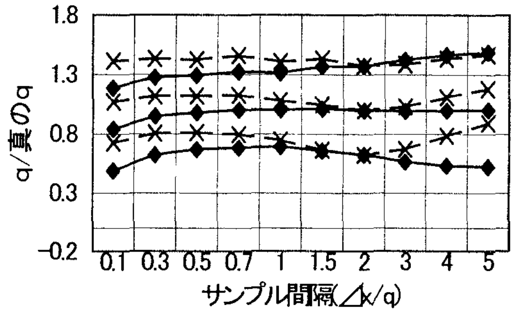
### 4．結論

・　発表時には自己相関関数に金塊効果（nugget effect）が含まれる場合の検討結果を示す。
Nugget effect とは確率場が比較的長い自己相関距離を持つ成分と、ホワイト成分のようなきわめて短い自己相関距離を持つ成分が重なっている確率場の自己相関関数の原点における不連続性のことを言う。

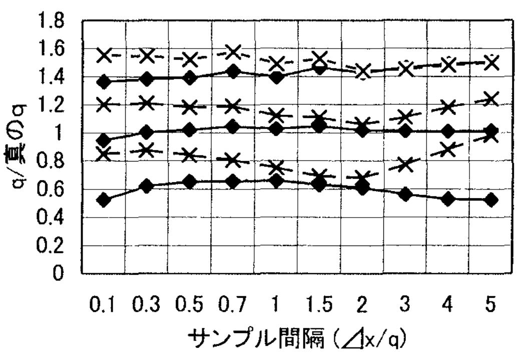
$$p_Z(\Delta x)=\begin{cases} bb\cdot\exp[-\Delta x/c] & (\Delta x>0.0)\\ 1.0 & (\Delta x=0.0)\end{cases}$$

$bb$：ホワイトノイズ成分の大きさ$(0\le bb\le 1)$
bb を含めた場合の自己相関距離と bb の推定結果

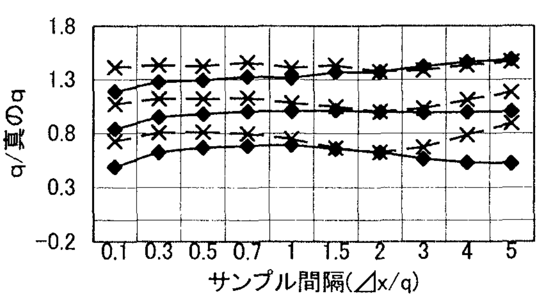
(c)n=50




(b)n=25




(c)n=50




図－1　AIC と ABIC を用いた推定結果
（　実線：AIC with 平均±標準偏差
点線：ABIC　　with 平均±標準偏差　）