マルチステップ繰込み積分法を利用した時間領域境界要素法の解析

福井大学工学部　学生会員　○　岡山 美央
福井大学工学部　正会員　　　福井 卓雄

筆者らは Fourier 変換場の基本解を使って粘弾性体の時間領域波動問題を解く境界要素法を開発してきた [1]。一方, Schanz & Antes[2] は, Lubich によるマルチステップ繰り込み積分法 [3, 4, 5, 6] を使った境界要素法により粘弾性波動問題を扱っている。Lubich の方法では基本解の Laplace 変換解を使っており, 計算効率も優れている。本報告では, Lubich の繰込み積分法による時間領域境界要素法の定式化について紹介するとともに, この方法に高速多重極法を導入するための方法について考察する。

1　Lubich によるマルチステップ繰り込み積分法

Lubich[3, 4] は, 繰込み積分

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\,dt \qquad (x \geq 0) \tag{1}$$

の近似値を離散化繰込み積

$$\sum_{0 \leq j\Delta t \leq x} \omega_j(\Delta t) g(x - j\Delta t) \tag{2}$$

により計算する方法を提案した。重み $\omega_j(\Delta t)$ は

$$F\left(\frac{\delta(\zeta)}{\Delta t}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j(\Delta t)\zeta^j \quad \text{あるいは} \quad \omega_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho} F\left(\frac{\delta(\zeta)}{\Delta t}\right)\zeta^{-n-1}\,d\zeta \simeq \frac{\rho^{-n}}{L}\sum_{l=0}^{L-1} F\left(\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right) e^{-2\pi i n l/L} \tag{3}$$

により与えられる。ここに, F は f の Laplace 変換であり, $\delta(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \zeta^j$ は線形マルチステップ法における生成多項式の商である。また, $\zeta_l = \rho e^{2\pi i l/L}$ である。

この方法の考え方は以下のとおりである。まず, Laplace 逆変換

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(\lambda)e^{\lambda t}\,d\lambda \qquad (t > 0) \tag{4}$$

を考える。ここで, Γ は複素平面内の積分路である。また, $F(s)$ は以下の誘導が可能となるための条件を満足していると仮定する (文献 [3] を参照)。式 (4) を (1) に代入すると, 繰込み積分は

$$\int_0^x f(t)g(x-t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(\lambda)\left(\int_0^x e^{\lambda t} g(x-t)\,dt\right)d\lambda \tag{5}$$

と表せる。ここで, 右辺のカッコ内の t に関する積分は 1 階微分方程式

$$y' = \lambda y + g \qquad y(0) = 0 \tag{6}$$

の解であるから, その近似解を線形マルチステップ法

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j-k} = \Delta t \sum_{j=0}^{k} \beta_j \left(\lambda y_{n+j-k} + g((n+j-k)\Delta t)\right) \tag{7}$$

により決定することができる。ただし, $y_{-k} = \cdots = y_{-1} = 0$ とする。さらに, (7) に ζ^n をかけて加えあわすと

$$(\alpha_0\zeta^k + \ldots + \alpha_k)\,\mathbf{y}(\zeta) = (\beta_0\zeta^k + \ldots + \beta_k)\,(\Delta t\lambda\mathbf{y}(\zeta) + \Delta t\mathbf{g}(\zeta)) \tag{8}$$

が得られる。ここに, $\mathbf{y}(\zeta) = \sum_0^\infty y_n\zeta^n$ および $\mathbf{g}(\zeta) = \sum_0^\infty g(n\Delta t)\zeta^n$ である。これを解いて

$$\mathbf{y}(\zeta) = \left(\frac{\delta(\zeta)}{\Delta t} - \lambda\right)^{-1}\mathbf{g}(\zeta) \qquad \text{ここに} \qquad \delta(\zeta) = \frac{\alpha_0\zeta^k + \ldots + \alpha_k}{\beta_0\zeta^k + \ldots + \beta_k} \tag{9}$$

を得る。これによって, (5) の $x = n\Delta t$ における近似値は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} F(\lambda)\left(\frac{\delta(\zeta)}{\Delta t}-\lambda\right)^{-1} \mathrm{g}(\zeta)\, d\lambda = F\left(\frac{\delta(\zeta)}{\Delta t}\right)\mathrm{g}(\zeta) \tag{10}$$

の n 番目の係数により表される。ただし, 上式の右辺は Cauchy の積分定理により導かれる。

2 時間領域境界要素法への応用

Lubich の方法を時間領域境界積分方程式

$$C(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x},t) = \int_{\partial B} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) * s(\boldsymbol{y},t)\, dS_y - \int_{\partial B} S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) * u(\boldsymbol{y},t)\, dS_y \tag{11}$$

に適用する。まず, 空間領域の近似基底 ϕ_i を導入して, 境界関数を

$$u(\boldsymbol{x},t) = \sum_i \phi_i(\boldsymbol{x}) u_i(t), \qquad s(\boldsymbol{x},t) = \sum_i \phi_i(\boldsymbol{x}) s_i(t) \tag{12}$$

で近似する。u_i, s_i は境界値の時間関数である。上式および (2) を (11) に代入すれば

$$C(\boldsymbol{x})\sum_i \phi_i(\boldsymbol{x}) u_i(n\Delta t) = \sum_i\sum_{k=0}^{n-1} A_i^{n-k}(\boldsymbol{x}) u_i(k\Delta t) - \sum_i\sum_{k=0}^{n-1} B_i^{n-k}(\boldsymbol{x}) s_i(k\Delta t) \tag{13}$$

となる。ここに, 影響関数 A_i^{n-k}, B_i^{n-k} は

$$A_i^{n-k}(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial B} \frac{\rho^{-(n-k)}}{L}\sum_{l=0}^{L-1} \hat{G}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right) e^{-2\pi i(n-k)l/L}\phi_i(\boldsymbol{y})\, dS_y \tag{14}$$

$$B_i^{n-k}(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial B} \frac{\rho^{-(n-k)}}{L}\sum_{l=0}^{L-1} \hat{S}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right) e^{-2\pi i(n-k)l/L}\phi_i(\boldsymbol{y})\, dS_y \tag{15}$$

である。上式の $\hat{G}$, $\hat{S}$ は, それぞれ, G, S の Laplace 変換である。また, 和の計算は FFT を使えば高速に計算することができる。以上によって, 通常の離散化手法を用いる場合と同様に, 時間領域境界要素法を構成することができる。

高速多重極法の適用可能性について 境界要素法によって自由度の大きい問題を扱う場合には高速多重極法の適用が必要になる。この方法に対する高速多重極法の適用可能性について考えてみる。まず, 空間領域においては $\sum_i A_i^{n-k}(\boldsymbol{x}_j)u_i(k\Delta t)$ の計算を高速化すれば良い。$k < n$ のとき $u_i(k\Delta t)$ は既知であるから

$$\sum_i A_i^{n-k}(\boldsymbol{x}_j)u_i(k\Delta t) = \frac{\rho^{-(n-k)}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\left[\sum_i u_i(k\Delta t)\int_{\partial B} \hat{G}\left(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{y},\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right)\phi_i(\boldsymbol{y})\, dS_y\right] e^{-2\pi i(n-k)l/L} \tag{16}$$

のカギカッコの内部を多重極展開すれば, 各ステップ毎の多重極モーメントについて Lubich の方法を適用することができる。以上は形式的な議論であり, 実際には, 展開項数の制限などを確認する必要がある。また, 時間領域に対しても何らかの形の展開が可能であろうと考えられるが, 検討課題である。

数値解析結果などについては当日報告する。

参考文献

[1] T. Fukui and K. Funato : Time domain boundary element method in anti-plane viscoelastic wave propagation problems, in *Boundary Element Methods*, eds. M.Tanaka and Z.Yao, Elsevier, pp. 47–56, 1996.

[2] M. Schanz and H. Antes : A new visco- and elastodynamic time domain boundary element formulation, *Comput. Mech.*, **20**, pp. 452–459, 1997.

[3] C. Lubich : Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Mumer. Math.*, **52**, pp. 129–145, 1988.

[4] C. Lubich : Convolution quadrature and discretized operational calculus II, *Mumer. Math.*, **52**, pp. 413–425, 1988.

[5] C. Lubich and R. Schneider : Time discretization of parabolic boundary integral equations, *Mumer. Math.*, **63**, pp. 455–481, 1992.

[6] C. Lubich : On the multistep time discretization of linear initial-boundary value problems and their boundary integral equations, *Mumer. Math.*, **67**, pp. 365–389, 1994.