境界要素法によるクラック群の進展解析における前処理法

福井大学工学部　学生会員　○　畔上 高志
福井大学工学部　正会員　　　　福井 卓雄

本報告では, 境界要素反復解法において, 超特異核を有する境界積分方程式を解く場合のひとつの前処理法について述べる。このような積分方程式を解く代表的な問題はクラック問題である。ここでは, クラック群の進展解析を対象として, この前処理法の適用法と簡単な数値解析の結果について述べる。

1　境界要素法によるクラック解析

2次元無限弾性体中のクラック群について考える。クラックは数学クラックを仮定し, クラック面の摩擦は考慮しない。平面ひずみ問題を考えると, 変位 u_i は領域内で Navier の方程式

$$G\left(u_{i,jj}+\frac{1}{1-2\nu}u_{j,ji}\right)=0 \qquad \text{in } B \tag{1}$$

を満足する。弾性体中には M 個のクラック $S_1, S_2, \cdots, S_M$ が含まれているものとする。クラック S_K の内面 S_K^+, S_K^- における境界条件は

$$s_i^+=s_i^-=0 \qquad \text{on } S_1, S_2, \cdots, S_M \tag{2}$$

となる。以上の式において, G はせん断弾性係数, ν は Poisson 比である。s_i は境界上の応力ベクトルで, 境界の単位法線ベクトルを n_i, 初期応力を σ_{ij}^0, 応力ベクトル作用素を T_{ij} とするとき,

$$s_i=n_j\sigma_{ji}^0+T_{ij}u_j=n_j\sigma_{ji}^0+G\left(\frac{2\nu}{1-2\nu}n_iu_{k,k}+n_ju_{i,j}+n_ju_{j,i}\right) \tag{3}$$

で与えられる。また, クラック上の量 f について, クラック面の法線 n_i と同じ外向き法線 n_i^+ を持つ面の量を f^+ で, 逆向きの外向き法線 n_i^- を持つ面の量を f^- で表すものとする。

Navier の方程式 (1) の基本解および 2 重層核は次のように与えられる。

$$G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{8\pi(1-\nu)G}\left[(3-4\nu)\,\delta_{ij}\log\frac{1}{r}+r_{,i}r_{,j}-2(1-\nu)\,\delta_{ij}\right],\quad S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=T_{jk}^{y}G_{ki}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{4}$$

クラック表面における境界積分方程式は, Somigliana の公式の応力ベクトル形に境界条件 (2) を考慮すれば

$$n_j(\boldsymbol{x})\sigma_{ji}^0=\sum_K \mathrm{Pf}\int_{S_K}U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})[u_j](\boldsymbol{y})\,dS_y \tag{5}$$

となる。ここに, $[u_i]=u_i^+-u_i^-$ はクラックの開口変位であり, $U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=T_{ik}^{x}S_{kj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ である。

2　前処理法

一般に, 線形方程式 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ を反復法で解く場合に, 行列 $\mathbf{M}=\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ を適当に選んで, 等価な方程式

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}=\tilde{\mathbf{b}}, \qquad \text{ここに}\quad \tilde{\mathbf{A}}=\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}_2^{-1},\quad \tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{M}_2\mathbf{x},\quad \tilde{\mathbf{b}}=\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{b} \tag{6}$$

に変換して解くことが行なわれる。変換後の行列が $\mathbf{A}\simeq\mathbf{I}$ であれば, 反復法は極めて速く収束する。変換 (6) を前処理と呼んでいる。

積分方程式 (5) は超特異核 $U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を持つ第一種の積分方程式である。一般に, 第一種積分方程式は解きにくい, すなわち, 反復法の収束性が悪いことが知られている。ここでは, 積分方程式の核を変換して, 与えられた積分方程式と等価な第二種積分方程式を作りそれを解くことによって収束性を改善することにする。

定義により, 超特異核 $U_{ij}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ は 2 重層核あるいは基本解と

$$U_{jk}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = T^y_{jl}S_{lk}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = T^y_{jl}T^z_{km}G_{lm}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \tag{7}$$

の関係があるから, 積分方程式 (5) の超特異核 $U_{ij}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ を含む積分に基本解 $G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ をかけて積分してみると, 滑らかなクラック境界において

$$\int_{S_K} G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\left[\int_{S_K} U_{jk}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})[u_k](\boldsymbol{z})\,dS_z\right]dS_y = \frac{1}{4}[u_i](\boldsymbol{x}) + \int_{S_K}\left[\int_{S_K} S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})S_{jk}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\,dS_y\right][u_k](\boldsymbol{z})\,dS_z \tag{8}$$

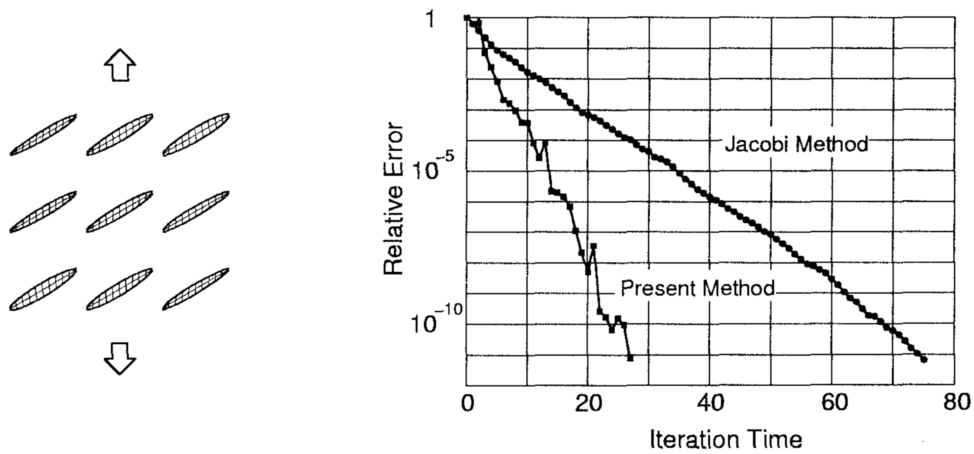
となる。右辺第 2 項の積分の核は正則となる (Cauchy の主値を考慮した上で) ので, 積分方程式 (5) は正則核を持つ第二種積分方程式となる。すなわち, 基本解 G_{ij} を作用させることは超特異核を軟化する働きをすることとなって, 基本解 G_{ij} を前処理に使うことができる。

積分方程式の数値近似に選点法を使う場合には, 右辺ベクトルは選点の値であるので, 前処理行列 $\mathbf{M}$ の逆の成分を

$$m^{-1}_{ij;kl} = G_{ij}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_l) \tag{9}$$

とする。ただし, $k=l$ の場合には, 特異性を避けるために $\boldsymbol{x}_k$ として少し離した点をとる。行列 $G_{ij}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_l)$ とベクトルとの積は高速多重極法を使って計算できるので, この方法は高速多重極境界要素法を使う場合にも有効である。

数値計算例 図–1 に 3 × 3 のクラック群の計算における収束の様子を示す。左側にクラック開口変位の結果を示す。, クラック中心間距離はクラック長と同じで, 上下方向に引張を受けている。右図より, 通常の Jacobi 法による前処理に比べて収束性能が大きく改善されていることがわかる。



図–1 3 × 3 のクラック群の計算における反復法の収束の様子 (要素数 900)

クラック進展による反復回数の変化を単一クラックの解析について見たものが表–1 である。クラックの進展に伴う要素数の増加により反復回数は増加するが, Jacobi 法に比べて現在法は 1/3〜1/2 の反復回数で収束している。

表–1 単一クラック (傾き 30°, 要素数 100) の進展解析における反復回数の変化：収束判定は相対誤差 10^{-11} 以下

要素数		100	110	120	130	140	150	160
引張クラック	Jacobi 法	26	40	41	44	44	47	47
	現在法	13	13	13	14	13	14	15
圧縮クラック	Jacobi 法	26	43	47	51	52	54	56
	現在法	13	17	17	18	19	20	20

上の解析例は要素数が 100〜1000 程度の問題であるが, ここで述べた前処理法が有効な方法であることを示している。反復法の収束性が本質的な問題となるような大規模な問題においては高速多重極境界要素法が使われることになるが, 上で述べたとおり, この前処理は高速多重極法により計算することができ, 適用は容易である。

各種のクラック問題に対する適用性の検証および高速多重極境界要素法への応用に関しては当日報告する。