確率的サンプリング法のデータを利用した曲面の Delaunay 三角形分割

福井大学工学部　学生会員　○　上田 哲也
福井大学工学部　正会員　　　福井 卓雄

確率微分方程式による曲面のサンプリング法は極めて高速な曲面追跡手法である [1, 2]。境界要素法では主として境界だけを離散化するので, 曲面上だけのサンプリング点を生成するこの手法は, 自由度の大きな境界要素データの自動生成のための手段として有望である。本研究では, 確率的サンプリング法の生成する曲面データを用いて曲面の Delaunay 三角形分割を行ない, 境界要素データとして利用することを試みる。

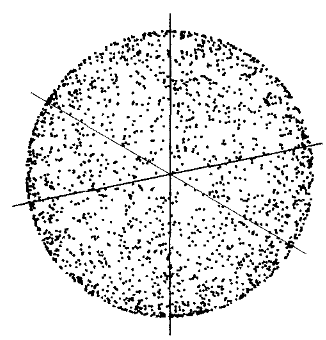
1　確率微分方程式による曲面のサンプリング

3 次元空間の曲面 S が陰関数表示 $F(\boldsymbol{x})=0$ により与えられているとする。田中ら [1] は, この曲面上の点をサンプリングする方法として, 各ステップにおけるサンプリング点の変位量 dx_i を確率過程と見て, 確率微分方程式

$$dx_i(t)=P_{ij}(\boldsymbol{x}(t))\,dw_j(t)-\frac{D}{|\nabla F|^2}\frac{\partial F(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_i}\frac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_j\partial x_k}P_{kj}(\boldsymbol{x}(t))\,dt-KD\frac{\partial F(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_i(t)}\frac{F(\boldsymbol{x}(t))}{|\nabla F|^2}\,dt \tag{1}$$

を逐次的に解いて一連の点列を決定する方法を提案した。上式において, ∇F は F の勾配, dw_i は正規乱数ベクトル, D は分散定数, K は正の拘束パラメータである。また, P_{ij} は射影作用素で $P_{ij}(\boldsymbol{x})=\delta_{ij}-\partial F(\boldsymbol{x})/\partial x_i\partial F(\boldsymbol{x})/\partial x_j/|\nabla F(\boldsymbol{x})|^2$ で定義される。上式の右辺の第 1 項は接平面上の変位を表す項, 第 2 項は, 第 1 項に対する補正項で, 伊藤積分の意味の確率過程に変換するために現れる項, 第 3 項は垂直方向の修正項である。

計算は, 初期値を適当に定め, 適当な空走期間を置いた後に, 得られる点を Newton 法により修正して曲面上に置きながら実行する。計算は極めて高速であり, 数十万点のサンプリングを数秒以内に実行することができる。図–1 に球面のサンプリングの例を示す。サンプリング点の数は 2000 であり, 後のメッシュ化の例題として用いたものである。

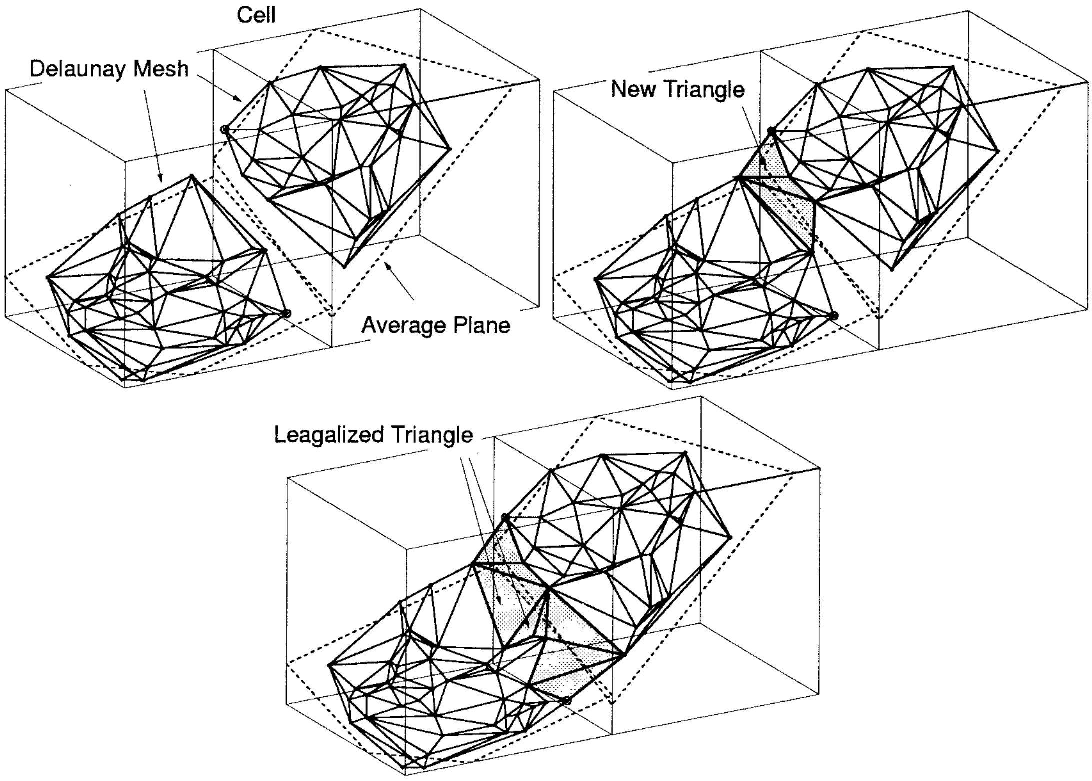


図–1　球面のサンプリング例

2　曲面の Delaunay 三角形分割

曲面上のサンプリング点を使って境界要素データを作成するために, Delaunay 三角形分割 [3] を試みる。閉じた曲面の分割を得るために, まず曲面を小部分に分割し, 各小部分について曲面の近似平面をとってその上で Delaunay 分割を行なう。つぎに, 小部分の三角形分割どうしをつなぎ合わせて全体の曲面の分割を得る, という方法を取る。具体的には, つぎの手順で計算を実行する。

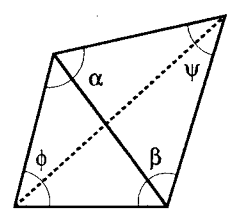
1. 曲面を小部分に分けるために, サンプリング点の集合を 8 分木により構造化する。曲面を平面で近似できるためには, 葉のセルをある程度以下の大きさになるように細分化する必要がある。しかし, 葉のセルに含まれるサンプリング点の数が小さすぎると分割の効率が落ちる。ここでは, 葉のセルに含まれる点の数を 100 以下となるように 8 分木を構成した。
2. 葉のセルについて, サンプリング点の平均位置と平均法線方向を求め, 近似平面を決定する。サンプリング点の近似平面への射影を取り, 平面上の Delaunay 三角形分割を行なう。ここでは, 確率的逐次添加法のアルゴリズムを用いている [3]。
3. 8 分木を上昇して親のセルに移り, 含まれる子セルの三角形分割同士をつなぎ合わせる。このとき角度最適条件を満足するように, 必要に応じて新しく作成した三角形に隣接するメッシュの組みかえを行なう。これを繰り返して根のセル (全体を含むセル) まで続ける。



図–2 子セルの三角形分割のつなぎ合わせ：二つの三角形分割の接合線を決定 (左上), 接合線に沿って新しい三角形を作成 (右上), 角度最適条件をチェックし, 必要があれば辺フリップを実行 (下)

三角形分割同士のつなぎ合わせはつぎのように行なっている (図–2 を参照)。

1. あらかじめ, 子セルの三角形分割の境界線のデータを作成しておく。
2. 子セルの分割の境界線のうち, 接合区間を選択する。
3. 接合区間の端から新しい三角形を作っていく。
4. 新しい三角形と隣接する三角形との間の角度最適条件をチェックする。
5. 必要があれば隣接三角形との間で辺フリップを行なう。
6. 3–5 を繰り返して終端点まで続ける。



図–3 辺フリップの条件

辺フリップのための条件として, 図–3 に示すように, 互いに向かい合う角度の合計 $\alpha+\beta$ および $\phi+\psi$ を求め, 合計が大きい方の角を分割することとした。平面の場合の条件の単純な拡張であるが, サンプリング点の数が十分に大きければ三角形同士の交差は平面に近い状態となるので, とくに問題はないようである。

残された問題として, 三角形分割の均等さの程度を上げることがある。図–2 からも明らかなように, 乱数から作成した点データは配置に大きなばらつきがあり, 均等なメッシュを作成することが困難である。この点を解決するために, バブルメッシュ法を曲面上のサンプリング点に適用することを現在検討中である。バブルメッシュ法では近傍点同士の影響だけを考慮すれば良いので, ここでも 8 分木を応用することを考えている。

具体的な曲面の三角形分割およびそれらの応用については当日報告する。

参考文献

[1] S. Tanaka, A. Morisaki, S. Nakata, Y. Fukuda, and H. Yamamoto : Sampling inplicit surfaces base on stochastic differential equations with converting constraint, *Computers & Graphics*, **24**, pp. 419–431, 2000.

[2] 福井卓雄：確率微分方程式による任意曲面データの生成とその境界積分方程式法への応用, 計算工学講演会論文集, **6**, 2002.

[3] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf : *Computational Geometry*, Springer, 1997.