確率微分方程式による曲面サンプリング手法の境界要素データ作成への応用

福井大学工学部　学生会員　○　川端 真治
福井大学工学部　正会員　　　福井 卓雄

近年, 高速多重極法を利用することによって, 境界要素法は巨大な自由度の問題を扱うことができるようになった。このような問題の数値モデル化には自動的なデータ生成法が是非必要である。この主旨で, 確率微分方程式による曲面サンプリング手法を境界データの生成に利用することを提案した [1]。しかしながら, 前報には計算上の誤りがあった。本報ではこの誤りを正し, 結果に対する考察を加えるとともに, 手法を改善するための方法を提案する。

1　確率微分方程式による曲面のサンプリング

3 次元空間の曲面 S が陰関数表示 $F(\boldsymbol{x}) = 0$ により与えられているとする。この曲面上にできるだけ均等に点をサンプリングして, その点の集合を境界積分方程式を近似的に解くための形状データとすることが現在の目標である。サンプリングの手法として, 田中ら [2] によって提案されている, 各ステップにおけるサンプリング点の変位量 dx_i を確率過程と見て, 確率微分方程式

$$dx_i(t) = P_{ij}(\boldsymbol{x}(t))\,dw_j(t) - \frac{D}{|\nabla F|^2}\frac{\partial F(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_i}\frac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_j \partial x_k}P_{kj}(\boldsymbol{x}(t))\,dt - KD\frac{\partial F(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_i(t)}\frac{F(\boldsymbol{x}(t))}{|\nabla F|^2}\,dt \tag{1}$$

を解くことにより一連の点列を決定する方法を使う。ここに, ∇F は F の勾配, dw_i は正規乱数ベクトル, D は分散定数, K は正の拘束パラメータである。P_{ij} は射影作用素で $P_{ij}(\boldsymbol{x}) = \delta_{ij} - \partial F(\boldsymbol{x})/\partial x_i \partial F(\boldsymbol{x})/\partial x_j/|\nabla F(\boldsymbol{x})|^2$ で定義される。上式の右辺の第 1 項は接平面項, 第 2 項は, 第 1 項に対する補正項で, 伊藤積分の意味の確率過程に変換するために現れる項, 第 3 項は垂直項である。

2　境界積分方程式法

上で得られた曲面上のサンプリング点をそのまま使って境界積分方程式を近似的に解いてみる。例として, Laplace 方程式の外部 Neumann 問題を扱う。Laplace 方程式の解 u は, 点 $\boldsymbol{x}$ が境界上にあるとき, Green 公式

$$\frac{1}{2}u(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial B} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})s(\boldsymbol{y})\,dS_y - \int_{\partial B} S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u(\boldsymbol{y})\,dS_y \qquad G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}, \quad S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial n_y} \tag{2}$$

を満足する。ここに, s は境界上の Neumann データ $\partial u/\partial n$ である。式 (2) は, 適当な境界条件が与えられるとき, 未知の境界値に関する積分方程式となっている。つぎに, 与えられた N 個の点の上で, 境界積分方程式 (2) を

$$\frac{1}{2}u(\boldsymbol{x}_i) = \sum_{j=1}^{N} G(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)s(\boldsymbol{x}_j)\,\Delta S_j - \sum_{j=1}^{N} S(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)u(\boldsymbol{x}_j)\,\Delta S_j \tag{3}$$

のように近似して解く。ただし, $i = j$ のときには, G, S の値を

$$G(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_i) = G(\boldsymbol{x}_i + 0.3\sqrt{\Delta S_i}\boldsymbol{e},\boldsymbol{x}_i), \qquad S(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_i) = 0 \tag{4}$$

により近似する。ここに, $\boldsymbol{e}$ は任意の単位ベクトルである。Neumann 問題の場合には $s(\boldsymbol{x}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ が与えられるので, 式 (3) は $u(\boldsymbol{x}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ を未知数とする代数方程式である。

N が大きな問題を解く場合には, 方程式 (3) を高速多重極法を使った反復法によって解く [1]。ここで問題となるのは, 用意されるデータは, ランダムに配置された境界上の点とその上での法線方向だけであるので, それぞれの境界点における ΔS_i を何らかの形で推定してやる必要があることである。このために, 前報 [1] では, 高速多重極法で使用している 8 分木を用いて, 葉のセルに含まれる近似平面 (サンプリング点から作成する) の面積を計算し, 当該セルの平均 $\overline{\Delta S_i}$ を ΔS_i の近似値として (3) を解いた。

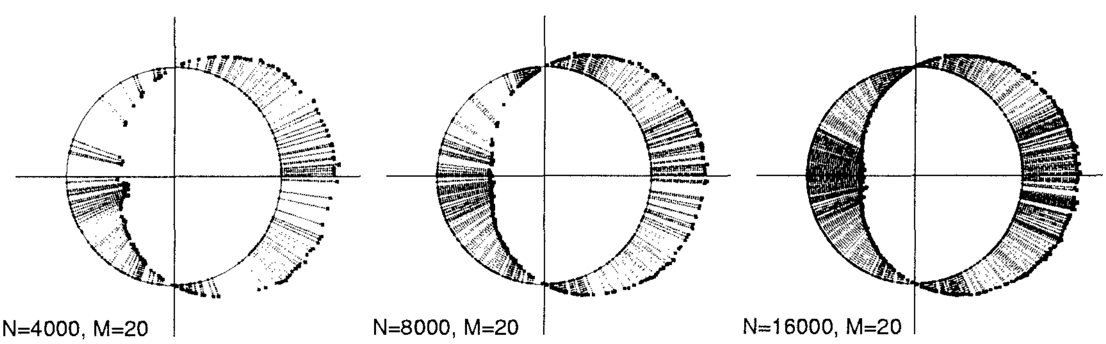
3　計算結果の修正と考察

前報 [1] においては，セルに含まれる近似平面の面積の計算の一部に誤りがあった。ここでは，それを修正したものを示す。表–1 は，半径 1 の球面上において，上のようにして求めた ΔS_i の平均値とその相対誤差および標準偏差を，葉セルに含まれる境界点数の上限値 M および総境界点数 N を変えて求めたものである。M の値がある程度以上の値のときに平均値の精度が高くなる傾向は前報と同じであるが，前報と比較して，誤差が 1%以下となっており，標準偏差も小さくなっている。数値解にある程度の精度が期待できる。

表–1　8 分木上で推定された ΔS_i の平均値と誤差および計算値の標準偏差：M は葉セルに含まれる境界点数の上限値，括弧内は相対誤差，数値は小数以下 3 桁目からの数値を示す

M	$N=4000$			$N=8000$			$N=16000$		
	$(\sum\Delta S_i)/N$	(Error)	S.D.	$(\sum\Delta S_i)/N$	(Error)	S.D.	$(\sum\Delta S_i)/N$	(Error)	S.D.
2	216457	(-.3110)	270980	109656	(-.3019)	111258	0550697	(-.2988)	0538528
4	264406	(-.1584)	277761	134010	(-.1468)	113367	0676608	(-.1385)	0537760
8	295552	(-.0592)	269427	147809	(-.0590)	107596	0746338	(-.0497)	0489503
16	307440	(-.0214)	249744	155154	(-.0123)	093193	0773044	(-.0157)	0422820
32	311946	(-.0070)	220683	156461	(-.0039)	081438	0783922	(-.0019)	0326214
64	315604	(.0045)	167973	156590	(-.0031)	063316	0786607	(.0015)	0287851
128	311272	(-.0092)	146602	157557	(.0030)	053735	0784456	(-.0012)	0228582
Exact	314159	$\times10^{-8}$		157080	$\times10^{-8}$		0785398	$\times10^{-8}$	

前報と同じく，球面境界の外部 Neumann 問題 (境界条件 $s=n_x$) を解いた結果を図–1 に示す。ΔS_i の値が改善されたために，平均的な精度は向上している (とくに，$N=4000$ の場合)。しかし，境界上の解の値のばらつきは前報と同様に残る。これはサンプリング点の配置が一様でないことに起因するものであり，現在の手法ではやむを得ないと考える。



図–1　球形空孔の解析例：$M=20$ として N を変えた場合

今後研究を進める方向として，現在，つぎの 3 つの面から手法を検討中である。

1. サンプル点の配置をできるだけ均等にするために，曲面上に配置された点の集合に対してバブル法の適用を試みる。
2. 本研究で ΔS_i を推定する過程で，8 分木のセルに切り取られる近似平面を決めている。この近似平面そのものを要素として使うことは可能であろう。ただし，要素は非適合となる。また，十分な要素分割のためには，かなり多めのサンプリング点を取る必要がある。
3. Nyström の方法は積分方程式の数値解法の一つである。サンプリング点を使って Nyström の方法を試みてみる。

これらに対する検討結果については当日報告する。

参考文献

[1] 福井卓雄：確率微分方程式による任意曲面データの生成とその境界積分方程式法への応用，計算工学講演会論文集，**6**, 2002.

[2] Tanaka, S, A. Morisaki, S. Nakata, Y. Fukuda, and H. Yamamoto : Sampling inplicit surfaces base on stochastic differential equations with converting constraint, *Computers & Graphics*, **24**, pp. 419–431, 2000.