Wavelet変換のパラメータ同定解析への適用

信州大学大学院 ○長尾 純
信州大学工学部 正会員 大上俊之
信州大学工学部 正会員 小山 茂

1. はじめに

線形システムに対してウェーブレット変換を行うと，ウェーブレットスペクトラム上のマザーウェーブレットにデータの特徴が集約されるという性質がある．この性質を利用することにより，長方形行列の近似逆行列を求めることが可能である[1]．

本研究は，観測値から逆に材料パラメータを推定する同定解析にウェーブレット変換を応用することを試みるもので，ウェーブレット変換に用いる基底関数の次数，データ圧縮率の大きさが，解の精度に与える影響について考察する．

2. Wavelet変換による近似逆行列の導出

n行n列の正方マトリックスAに対するウェーブレット変換は，基底関数の線形変換によって得られるウェーブレット変換マトリックスWを用いて次のように与えられる．

$$A' = W \cdot A \cdot W^T \tag{1}$$

ここに，A'はウェーブレットスペクトラムである．一般にウェーブレットスペクトラムは1行1列の近傍に絶対値の大きい値が分布する．これは，元のマトリックスの持つ情報がウェーブレット変換によって1行1列近傍に集約されていることを表している．得られたウェーブレットスペクトラムに逆ウェーブレット変換を行うことによって以下のように元のマトリックスAが得られる．

$$A = W \cdot A' \cdot W^T \tag{2}$$

ウェーブレット変換のデータを集約する特徴を利用することで，データの圧縮が可能になる．データ圧縮の手法として，大別して以下の2つがある．

1. 閾値法：データの特徴を表す絶対値の大きなスペクトラムのみを残し，他をゼロとする手法．
2. 領域法：1行1列を起点として，ある程度の大きさにスペクトラムを切り出す手法．

閾値法は，圧縮率は低いが元のデータをよく表現でき，領域法では圧縮率は高いが再現性が低いという特徴がある．本研究では，ウェーブレットスペクトラムの大きさを自由に変更できる領域法を使用する．今,大きさn行m列の長方形行列Cについて考えると，ウェーブレット変換のデータ圧縮を利用して，長方形行列Cの近似逆行列C_{app}^{-1}(m行n列)が次の手順で得られる．

1. ウェーブレット変換をするために，C(n行m列)に大きさℓ行ℓ列のゼロマトリックスを重ね合わせC_{+zero}(ℓ行ℓ列)を求める．ここに，ℓは2のべき乗の数である．
2. C_{+zero}(ℓ行ℓ列)をウェーブレット変換し，ウェーブレットスペクトラムC'(ℓ行ℓ列)を得る．
3. ウェーブレットスペクトラムC'に対して任意の大きさにスペクトラムC'_{cut}(正方行列)を切り出す．
4. C'_{cut}に対して逆行列C'^{-1}_{cut}を求める．
5. C'^{-1}_{cut}にℓ行ℓ列のゼロマトリックスを重ね合わせ，$C'^{-1}_{cut+zero}$(ℓ行ℓ列)を得る．
6. スペクトラム$C'^{-1}_{cut+zero}$に対して逆ウェーブレット変換し，$C^{-1}_{cut+zero}$(ℓ行ℓ列)を求める．
7. $C^{-1}_{cut+zero}$からm行n列のマトリックスを切り出して，Cの近似逆行列C^{-1}_{app}(m行n列)を得る．

本研究では，上記の手順によって同定解析のシステム行列の近似逆行列を求めるになる．

3. 基底関数とデータ圧縮

ウェーブレット変換に用いられる基底関数は，高次関数の場合，近似逆行列の再現性は高いが，計算過程において発生するスパイク状の誤差が大きくなる傾向がある．一方，低次では高次関数と比較して近似逆行列の再現性が低いという性質がある．

また，ウェーブレットスペクトラムの端部(ℓ行ℓ列の近傍)にはデータが含むノイズや，計算過程に発生するスパイク状の誤差が集約されるという性質がある．したがって，データ圧縮をすることによって，データに含まれるノイズや，スパイク状の誤差を取り除くことが可能となる．

4. 解析例

図-1に示す解析モデルを対象に，順解析で求めた変位解を測定変位として与え，ヤング率(E1〜E5)を同定する．測定変位の数を2，5，7個とした場合について，ウェーブレット変換の基底関数の次数，データ圧縮の大きさをパラメータとして計算を行う．表-1に同定するヤング率の真値と初期値を示す．

基底関数としてDaubechiesとCoifmanの基底関数を用い，それぞれについて各次数をパラメータとした場合の計算結果を図-2に，18次のDaubechiesを基底関数として，圧縮により切り出されるスペクトラムの大きさをパラメータとした場合の計算結果を図-3に示す．

本解析モデルにおけるウェーブレット変換マトリックスのサイズは128行128列であり，DaubechiesとCoifmanともに18次の場合において，計算精度が最も良かった．異なる解析モデルで32行32列のウェーブレット変換マトリックスを作成し，Daubechiesの基底関数で同様の計算を行ったところ，32行32列のサイズでは6次の場合に計算精度が最も良かった．このことより，ウェーブレット変換マトリックスのサイズの約1/6から1/7の次数の基底関数を選択すれば，精度の良い解が得られると推定できる．

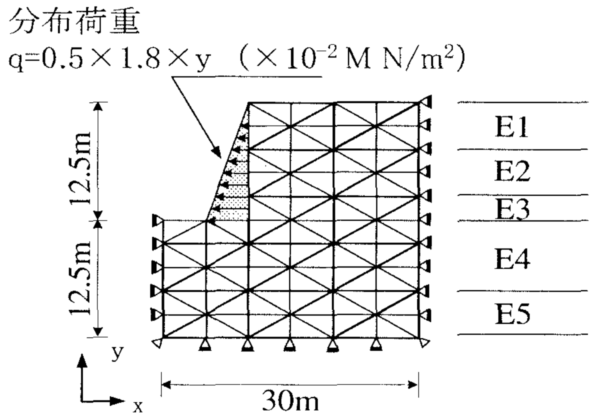
データ圧縮については，同定するマトリックスの行と列の大きさを比較し，大きい方を圧縮後のサイズとした場合に精度の良い計算結果が得られた．本解析モデルでは，観測データの数が7個の場合，同定すべきマトリックスの行と列のサイズは117行115列となるが，データ圧縮後のサイズは117の場合において精度が最も良かった．別の解析モデルで計算した場合においても，同様な結果であった．

5. おわりに

ウェーブレット変換により，長方形マトリックスの近似逆行列を求められることを示し，パラメータ同定解析に適用した．数値計算の結果，用いる基底関数の次数はおよそ変換マトリックスの大きさの約1/6から1/7の次数とすればよいこと，データ圧縮後のサイズは同定するマトリックスの行と列の大きい方のサイズとすれば精度の良い解が得られることが分かった．

参考文献

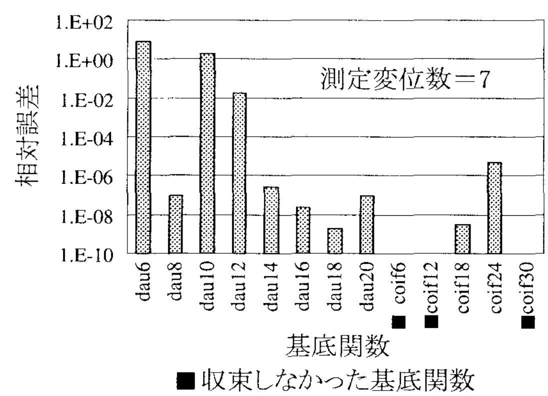
1) Doi T.,Hayano S.and SaitoY.,Wavelet solution of the inverse source problems.IEEE Transactions on Magentics,**33** No.2 1935-1938,**1997**



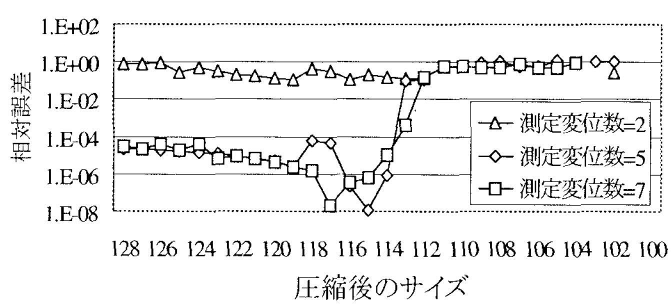
図–1 解析モデル

表–1 ヤング率の真値と初期値

未知物性値	ヤング率 (MN/m^2)		ポアソン比
	初期値	真値	
E1	1.5	1.0	0.40
E2	3.5	3.0	0.35
E3	0.8	0.50	0.40
E4	4.0	5.0	0.30
E5	12.0	10.0	0.30



図–2 各基底関数と相対誤差(対数表示)



図–3 圧縮後のサイズと相対誤差(対数表示)