

局所境界積分方程式法を適用したメッシュレス評価

信州大学大学院
信州大学工学部 正会員
信州大学工学部 正会員

○中村裕充
大上俊之
小山 茂

1. はじめに

境界要素法における領域積分項のメッシュレス化法の代表的なものとして、二重相反法、多重相反法、計算点解析法、非同次項を Fourier 級数に展開する方法等がある。これらは領域積分を境界積分に変換して領域積分項のメッシュレス化を図る方法である。

一方、Zhu らが示した局所境界積分方程式 (LBIE) 法¹⁾は、境界積分及び領域積分に対してエレメントフリーガラーキン法 (EFGM) を適用することによってメッシュレス化を図る方法である。

本研究では、Poisson 方程式を対象に LBIE 法を適用し、Fourier 級数に展開する方法²⁾、計算点解析法³⁾と比較し、その有効性を検討する。通常の EFGM では物理量の関数近似に移動最小二乗法 (MLSM) を用いるため、近似曲線が必ずしも節点を通らない。ここでは、節点のポテンシャルで表現される近似関数を LBIE 法に適用し、定式化を行う。

2. 局所境界積分方程式

境界 Γ で囲まれた 2 次元領域 Ω における Poisson 方程式を考える。

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, u) \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1)$$

ここに、 u はポテンシャル、 b は非同次・非線形項を表す。基本解 u^* を用いて式 (1) を境界積分方程式に変換すれば次のようになる。

$$u(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \frac{\partial u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} d\Omega - \int_{\Omega} u^* b d\Omega \quad (2)$$

今、図 1 に示すような全体領域 Ω の内部にソース点 $\mathbf{y}$ を含むサブ領域 Ω_s を考え、LBIE 法において定義されるコンパニオン解 u' を用いると、次のように LBIE 法の基本式を得る。

$$u(\mathbf{y}) = - \int_{\partial\Omega_s} u(\mathbf{x}) \frac{\partial u^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega_s} u^{**} b d\Omega \quad (3)$$

ここに、 $u^{**} = u^* - u'$ である。ソース点が全体境界 Γ 上にある場合の基本式は、図 1 より

$$\alpha(\mathbf{y})u(\mathbf{y}) = - \int_{\partial\Omega_s} u(\mathbf{x}) \frac{\partial u^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} d\Gamma$$

$$+ \int_{\Gamma_s} u^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega_s} u^* b d\Omega \quad (4)$$

となる。

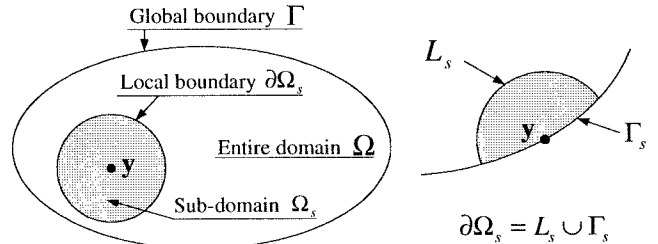


図-1 全体領域 Ω とサブ領域 Ω_s

3. 評価点における $u, \frac{\partial u}{\partial n}$ の決定方法

式 (3), (4) の局所境界 $\partial\Omega_s(L_s)$ 上、およびサブ領域 Ω_s 内の評価点におけるポテンシャル u は、移動最小二乗法 (MLSM) によって表現される。

任意の評価点 $\mathbf{x}$ における関数 $u(\mathbf{x})$ の近似関数 $u^h(\mathbf{x})$ は、式 (5) の重み付き二乗和 J を最小にすることによって、式 (6) のように形状関数 ϕ と節点値 u の積和として表される。

$$J = \sum_i^n w(r_i) (u^h(\mathbf{x}_i) - u_i)^2 \quad (5)$$

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_i^n \phi_i(\mathbf{x}) u_i = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (6)$$

ここに、 n は影響領域内の節点数、 $\mathbf{x}_i$ 、 u_i は節点 i の位置ベクトル、節点値であり、 r_i は評価点と節点 i との距離、 $w(r_i)$ は重み関数である。MLSM は重み付きの最小二乗法であることから、一般に近似関数 $u^h(\mathbf{x})$ が節点を通らないという特徴を有している。

ここで、節点 x_j におけるポテンシャルを U_j とし、式 (6) を全節点について適用すると、次式が得られる⁴⁾。

$$\Phi_N \mathbf{u} = \mathbf{U} \quad (7)$$

ここに、 N は全体領域の総節点数、 Φ_N は各節点における形状関数の行列、 $\mathbf{U}^T$ はポテンシャルの列ベクトルを表す。式 (7) より $\mathbf{u} = \Phi_N^{-1} \mathbf{U}$ となることから、これを式 (6) へ代入すると

$$u^h(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) \Phi_N^{-1} \mathbf{U} = \Psi(\mathbf{x}) \mathbf{U} \quad (8)$$

が得られ、近似関数 $u^h(\mathbf{x})$ が各節点のポテンシャル $\mathbf{U}$ で表現されることになる。

式(8)を式(3)または式(4)に代入することによって次式を得る。

$$\alpha_i U_i = f_i + \sum_j^N K'_{ij} U_j \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

ここに

$$f_i = \int_{\Gamma_{sq}} u^{**} \bar{q} d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} \bar{u} \frac{\partial u^{**}}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega_s} u^{**} b d\Omega \quad (10)$$

$$K'_{ij} = \int_{\Gamma_{su}} u^{**} \frac{\partial \psi_j}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_{sq}} \psi_j \frac{\partial u^{**}}{\partial n} d\Gamma - \int_{L_s} \psi_j \frac{\partial u^{**}}{\partial n} d\Gamma \quad (11)$$

である。式(9)を全節点に適用することによって、最終的に $\mathbf{U}$ に関して、

$$\mathbf{KU} = \mathbf{f} \quad (12)$$

$$K_{ij} = -K'_{ij} + \alpha_i \delta_{ij} \quad (13)$$

が得られる。境界条件を考慮して式(12)を解くことによって、節点のポテンシャル値 $\mathbf{U}$ を求めることができる。

4. 解析例

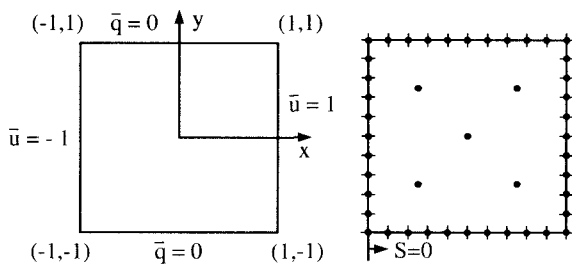


図-2 解析モデル

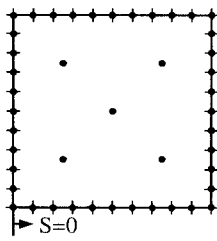


図-3 境界要素と節点配置

図2に示すような正方形領域における2次元 Poisson 方程式を解析する。最初に支配方程式が $\nabla^2 u + 6.25 \frac{\sin 2.5x}{\sin 2.5} = 0$ で与えられる場合について解析する。境界要素と節点は図3に示すように配置する。Fourier 級数による方法では周期を領域の大きさの2倍、項数を5とする。図4はポテンシャルの正解値に対する相対誤差の分布を境界に沿って示したもので、横軸は $S = 0$ からの距離 S を示している。いずれの手法も精度良い解が得られており、最大誤差はそれぞれ Fourier 級数による方法で 1.62%，計算点解析法で 1.28%，LBIE 法で 2.53%であった。

次に、支配方程式が $\nabla^2 u + 2.5^2 u = 0$ で与えられる場合について解析する。節点は、境界上に等間隔

に40個と固定し、内部点(IP)はそれぞれ格子状に配置する。図5より、計算点解析法では内部点の数が9個と少ない場合でも精度良い結果が得られているが、LBIE法では内部点の数を密に設定する必要があることがわかる。

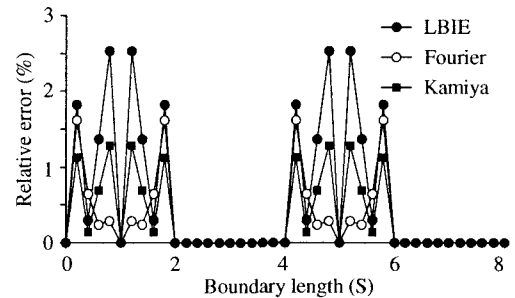


図-4 ポテンシャルの相対誤差

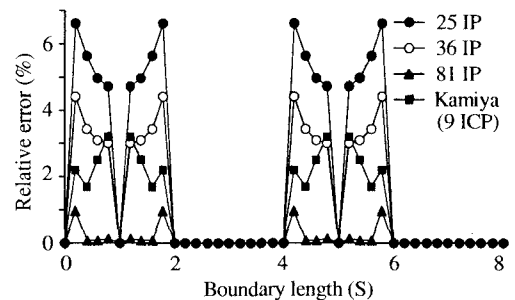


図-5 ポテンシャルの相対誤差(境界上の節点 40 個)

5. おわりに

本研究では、Poisson 方程式を対象に LBIE 法を適用し、その有効性について検討した。簡単な計算例から、内部点の数が結果の精度に大きな影響を与えることがわかった。解の精度の向上のためには、局所境界・サブ領域内の評価点の数、MLSM との関連等について詳細に検討する必要がある。

参考文献

- 1) T.Zhu, J.-D.Zhang, S.N.Atluri: A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach, Computational Mechanics, **21**(1998), pp. 223-235.
- 2) W.Tang: Transforming domain into boundary integrals in BEM - A generalized approach, Lecture Note in Engineering (Eds C.A.Brebbia and S.A.Orszag), **35**(1988), Springer - Verlag.
- 3) 神谷紀夫, 許松青: 非同次・非線形問題に対する境界要素法の一定式と解法, 日本機械学会論文集(A), **64**(1998), pp. 147-154.
- 4) 井浦雅司, 庭山孝史: Element Free Galerkin Method における基本境界条件の処理, 構造工学論文集, **43A**(1997), pp. 355-364.