

写像平面上におけるエレメントフリー解析

信州大学大学院

○豊島栄次

信州大学工学部 正会員

大上俊之

信州大学工学部 正会員

小山 茂

1. はじめに

近年、要素分割を必要としないエレメントフリーガラーキン法 (EFGM) に関する研究が盛んに行われている^{1),2),3)}. EFGMは関数近似に移動最小二乗法 (MLSM) を用いることによりメッシュレス化を可能としている手法であるが、基本境界条件処理が複雑になるといった問題がある. 本研究はEFGMの1手法として、基本境界条件を容易に満足させ、曲線境界を有する問題にも適用できる新たなエレメントフリー法を提案するものである.

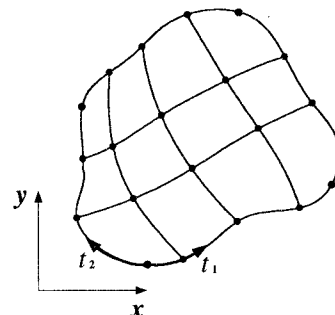


図-1 実平面上

2. 写像変換を用いたEFGM

(1) 写像変換と内挿関数

パラメータ t によって決まる関数を $u(t)$, 内挿関数を $\psi_i(t)$ とすると, $i = 0 \sim n$ の $n+1$ 個の u_i を通る近似関数 $u^h(t)$ は

$$u^h(t) = \sum_{i=0}^n \psi_i(t) u_i \quad (1)$$

と表すことができる. 2次元の場合は, 図-1に示すように領域の境界に沿ってパラメータ t_1, t_2 を導入すれば, 写像変換することによって図-2のように直交格子が得られる. 空間内に与えられた $(n_1 + 1) \times (n_2 + 1)$ 個の点をとる平面 (x, y) は t_1, t_2 の関数として次式によって表すことができる.

$$\left. \begin{aligned} x(t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \psi_i(t_1) \psi_j(t_2) x_{ij} \\ y(t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \psi_i(t_1) \psi_j(t_2) y_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに $x_{ij} = x(i, j)$, $y_{ij} = y(i, j)$ であり, t_1, t_2 は, それぞれ, $0 \leq t_1 \leq n_1$, $0 \leq t_2 \leq n_2$ を満たす実数である. 変位 u, v の関数近似に対しても内挿関数 $\psi_i(t)$ を適用することにより, 関数値 $u(t_{1i}, t_{2j})$, $v(t_{1i}, t_{2j})$ が節点の変位値 u_{ij} , v_{ij} そのものを表すことになるので, 基本境界条件の処理を通常のFEMと同様の方法で行うことができる.

本研究では内挿関数 $\psi_i(t)$ として Lagrange 多項式と節点間ベクトルを有限フーリエ級数で表現する関数⁴⁾を適用した.

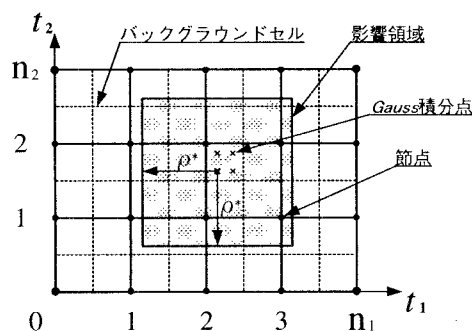


図-2 写像平面上

(2) 写像平面上における剛性マトリックスの作成

EFGMによる定式化はFEMの定式化とほぼ同じであり, 実平面上のデカルト座標系において弱形式化された弾性問題の剛性マトリックスは, 形式的にはEFGMでもFEMと同様に以下のような形で求めることができる.

$$\mathbf{K} = \iint_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy \quad (3)$$

ここに, Ω は実平面における領域を示し, $\mathbf{K}$ は剛性マトリックス, $\mathbf{B}$ はひずみ変位マトリックス, $\mathbf{D}$ は応力ひずみマトリックスである. EFGMでは要素そのものが存在しないため解析対象の領域と積分のための領域を区別して, 図-2に示すようなバックグラウンドセルと呼ばれる規則的な格子状の積分のためのセルを設定し, セルごとに領域積分を行う. 式(3)を写像平面 (t_1, t_2) 座標に変換することによって, $\mathbf{K}$ は以下のように写像平面上におけるバックグラウンドセルごと

の積分の和として表すことができる。

$$\begin{aligned} K &= \iint_{\Omega^*} \mathbf{B}^{*T} \mathbf{D} \mathbf{B}^* |J_D| dt_1 dt_2 \\ &= \sum_{\text{cell}} \iint_{\Omega_{\text{cell}}^*} \mathbf{B}^{*T} \mathbf{D} \mathbf{B}^* |J_D| dt_1 dt_2 \quad (4) \end{aligned}$$

ここに、 Ω^* は写像平面における領域、 $\mathbf{B}^*$ は写像平面上で求めた $\mathbf{B}$ を示し、 $|J_D|$ はヤコビアンである。式(4)の第2式に示すように、領域積分がセルごとの積分の和と一致することが本手法の大きな特徴である。

3. 解析例

解析例として、図-3に示すような先端に集中荷重を受ける片持ちばりを対象とし、平面応力問題として解析を行う。総節点数を $11 \times 5 = 55$ 、領域積分のためのセルの数を $10 \times 4 = 40$ とし、影響領域の大きさは $\rho^* = 3$ 、数値積分は 3×3 のGauss積分を用いた。比較のためのFEM解析では、本手法の解析モデルと同じ節点配置で要素数がセル数と同数であるモデルで、4節点平面応力要素を用いて計算を行った。それぞれの解析モデルを図-4に示す。図-5は軸線に沿うたわみについて厳密解に対する相対誤差の分布を示したものである。本手法による結果は、用いた内挿関数の違いにかかわらずLagrange多項式、有限フーリエ級数による結果とともに同じ節点配置のFEM解の結果よりも良い精度の結果が得られている。図-6は応力の比

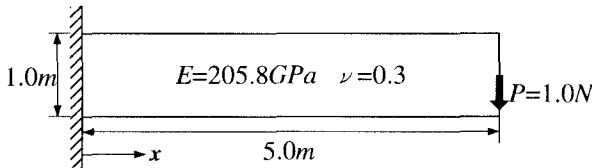


図-3 片持ちばりモデル

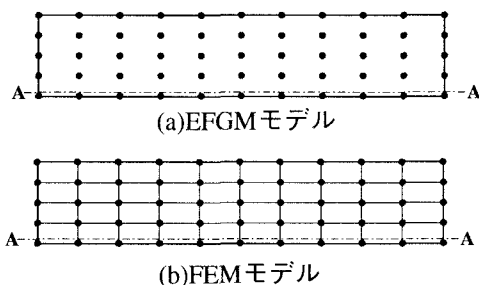


図-4 EFGM, FEMの節点配置 (実平面)

較図で、はりの下縁に最も近いGauss積分点(図-4のA-A線)における σ_x の誤差分布を示している。荷重・荷重点の近傍ではどの手法とも誤差の増大がみられるが、応力についても本手法による結果が全体にわたってFEMの結果に比べ精度良い解が得られている。

図よりFEMの結果が3点ごとに鋸刃の形状を示していることがわかる。これは、FEMでは要素間境界で内挿近似の微分値が不連続となるためであり、本計算例では、要素ごとに 3×3 点のGauss積分を用いているためにA-A線上では3点ごとにその影響が表れたものと考えられる。一方、本手法では評価点ごとに内挿近似を行っているので、関数の微分値が不連続となることはなく滑らかな結果となっている。

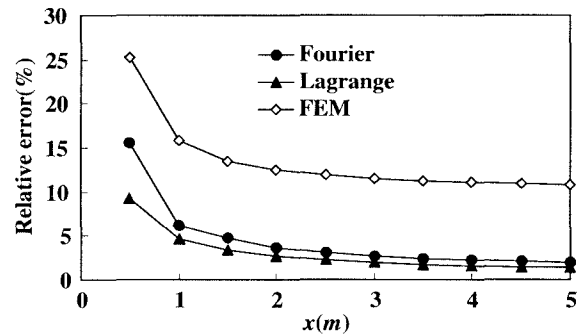


図-5 軸線のたわみ誤差分布

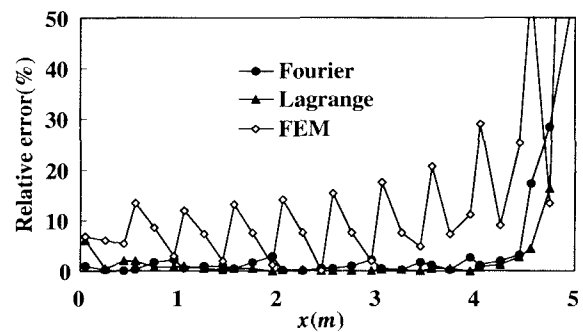


図-6 A-A線上の σ_x の誤差分布

4. おわりに

本研究では、エレメントフリー解析の基礎的研究として、基本境界条件を直接処理でき、矩形以外の曲線境界を有する形状の問題の対して適用できるエレメントフリー法の1手法について検討した。簡単な数値計算例を通して本手法が2次元弾性問題に適用可能であることが示された。曲線境界を有する問題の解析結果については当日報告する予定である。

参考文献

- 1) Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L.: Element-free Galerkin methods, *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol.37, 229-256, 1994.
- 2) 鈴木克幸他: 特集 メッシュレス法, 計算工学, Vol.7, No.1, 2-23, 2002
- 3) 末武義崇: Lagrange多項式を用いた薄板のエレメントフリー有限変位解析, 計算工学会講演会論文集, Vol.4, 55-58, 1999.
- 4) 草間孝志, 大上俊之: 有限フーリエ級数を用いた内挿関数の改良, 土木学会論文集, 第446号/I-19, pp.167-175, 1992.