

Spline 要素法を用いた変厚斜板の曲げ解析

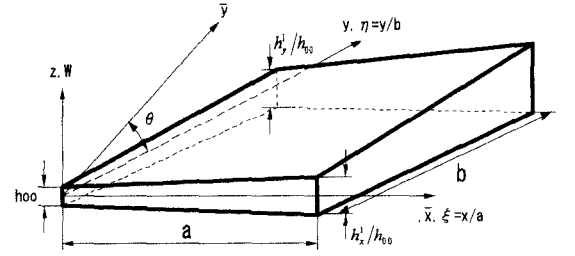
大同工業大学 ○望月章弘 同大学院 学生員 木村健一

大同工業大学 都市環境デザイン学科 正員 近藤八重 正員 水澤富作

1. はじめに 最近、構造物の合理的な設計や維持管理の視点から、板厚を変化させた変断面板が多用されるようになってきている¹⁾。また、斜板は、斜橋や航空機の翼などの構造要素として用いられており、その力学的特性を知ることは設計上重要な課題である。これまでも、種々の荷重を受ける斜板の曲げ解析に関する研究が数多く報告されているが、その多くは、等厚な薄板を対象にしたものである。Butalia²⁾ は、有限要素法を用いて、斜め Mindlin 板の曲げ解析を行っている。

しかしながら、変断面や異方性を有する斜め厚板の曲げ問題は、あまり報告されていないように思われる。

本文では、spline 要素法³⁾を用いて、図・1 に示すような 2 方向に変厚を有する直交異方性斜め Mindlin 板の曲げ解析



図・1 変厚斜板の座標系

を行い、解の収束性や解析精度について検討している。また、斜板のたわみや曲げモーメントなどを与える幅厚比、変厚比や斜角などの影響について明らかにしている。

2. 式の定式化 Mindlin 板理論とポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて、図・1 に示すような 2 方向に変厚な spline 要素モデルを導く。式の定式化にあたり、次式で表される無次元斜交座標系を用いる³⁾。

$\xi = x/a, \eta = y/b, W' = W/b \dots$ (1) ここで、 W はたわみであり、 a と b はそれぞれ斜板の長さで示す。横せん断変形の影響を考慮した Mindlin 板理論では、次式の独立した変位関数が要素内で仮定される。

$$\phi_x = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta), \phi_y = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta), W' = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \dots (2)$$

ここで、 A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} はそれぞれ未定係数であり、 $N_{m,k}(\xi)$ と $N_{n,k}(\eta)$ は、正規化された spline 関数である。

斜板の板厚は x 方向と y 方向に線形的に変化するものと仮定すれば、式で与えられる。

$$h(\xi, \eta) = h_{00} H(\xi) T(\eta), H(\xi) = (\delta_x - 1)\xi + 1, T(\eta) = (\delta_y - 1)\eta + 1 \dots (3)$$

ただし、 h_{00} は基準板厚であり、また δ_x と δ_y は変厚比であり、それぞれ $h_{x1}^1/h_{00}, h_{y1}^1/h_{00}$ で表す。

変厚斜め直交異方性 Mindlin 板のひずみエネルギー U と外力ポテンシャル V は、それぞれ次式で表される。

$$U = (D_x^{00} ab \cos \theta / 2a^2) \int_0^1 \int_0^1 [H(\xi)^3 T(\eta)^3 \sec^2 \theta \{ \cos^4 \theta (\partial \phi_x / \partial \xi)^2 + 2\nu_{xy} \cos^2 \theta \{ \sin^2 \theta (\partial \phi_x / \partial \xi)^2 - \sin \theta (\partial \phi_x / \partial \xi) (\partial \phi_y / \partial \xi) - (a/b) \sin \theta (\partial \phi_x / \partial \xi) (\partial \phi_y / \partial \eta) + (a/b) (\partial \phi_x / \partial \xi) (\partial \phi_y / \partial \eta) \} \\ + (E_y / E_x) \{ \sin^2 \theta (\partial \phi_x / \partial \xi)^2 - \sin \theta (\partial \phi_x / \partial \xi) (\partial \phi_y / \partial \xi) - (a/b) \sin \theta (\partial \phi_x / \partial \xi) (\partial \phi_y / \partial \eta) + (a/b) (\partial \phi_x / \partial \xi) (\partial \phi_y / \partial \eta) \}^2 \\ + (1 - \nu_{xy} \nu_{yx}) \{ G_{xy} / E_x \} \{ -2 \sin \theta (\partial \phi_x / \partial \xi) + (\partial \phi_y / \partial \xi) + (a/b) (\partial \phi_x / \partial \eta) \}^2 + 12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx}) \kappa (b/h_{00})^2 (a/b)^2 H(\xi) T(\eta) \\ \times \{ G_{yz} / E_x \{ \cos \theta \phi_x + (b/a) (\partial W' / \partial \xi) \}^2 + G_{xz} / E_x \{ -\sin \theta \phi_x + \phi_y - \tan \theta (b/a) (\partial W' / \partial \xi) + \sec \theta (\partial W' / \partial \eta) \}^2 \}] d\xi d\eta \dots (4)$$

$$V = qab^2 \cos \theta \int_0^1 \int_0^1 W' d\xi d\eta \dots (5)$$

ここで、 q は等分布荷重、 θ は斜角、 $D_x^{00} = E_x h_{00}^3 / 12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$ 、 E_x, E_y はヤング係数、 G_{xy}, G_{xz}, G_{yz} はせん断弾性係数、 ν_{xy}, ν_{yx} はポアソン比、 κ はせん断修正係数で 5/6 としている。

斜板の全ポテンシャルエネルギー、 Π は次式で示される。

$$\Pi = U - V \dots (6)$$

したがって、全ポテンシャルエネルギーを極値化すれば、次式より剛性方程式が得られる。

$$\partial \Pi / \partial \{\Delta\}_{mn} = 0 \dots (7)$$

3. 数値計算例及び考察

以下の数値計算例では、周辺固定された等方性斜板を対象とする。また、各表の (0.5, 0.5) などは、それぞれ $\xi = 0.5, \eta = 0.5$ のたわみや断面力の位置を示す。

図・2 には、変厚斜板の曲げモーメント M_x とせん断力 Q_x の収束性に与える要素分割数の影響を示してい

る。ここで、幅厚比 $b/h_{00}=10$ 、辺長比 $a/b=1.0$ 、斜角 $\theta=45^\circ$ と仮定している。また、変厚比 h_x^1/h_{00} は 1.0 と 2.0 とし、要素分割数は 4 から 24 まで変化させている。これより、要素分割数の増大に伴い、 M_x 、 Q_x とも良い収束状態が得られた。また、たわみの収束性については、少ない分割数でも一定値に収束している。以後の計算例では、要素分割数は 20 とする。表-1 には、等厚斜板のたわみの精度比較について示してある。ここで、幅厚比 $b/h_{00}=100$ 、辺長比 $a/b=1.0$ と仮定している。また、斜角 θ は 15° から 60° まで変化させている。比較のため、Butalia ら²⁾の有限要素法の値も示してある。これより、本手法は斜角 θ に関係なく、Butalia らの結果とよく一致している。表-2 には、変厚斜板のたわみと断面力に与える θ 、 b/h_{00} 、 h_x^1/h_{00} の影響が示してある。 θ は 30° 、 60° にとり、 b/h_{00} は 10、100、 h_x^1/h_{00} は 1.0 と 2.0 に変化させている。これより、 h_x^1/h_{00} を大きくすると、たわみや断面力は小さくなる。また、 b/h_{00} が増大すると、たわみは大きく変化するが、断面力についてはさほど b/h_{00} の影響を受けない。図-3 には、変厚斜板のたわみ ($\xi=0.5, \eta=0.5$) に与える h_x^1/h_{00} と θ の影響を示している。ここで、 $a/b=1.0$ 、 $b/h_{00}=10$ と仮定している。また、 h_x^1/h_{00} は 1.0、1.5、2.0、

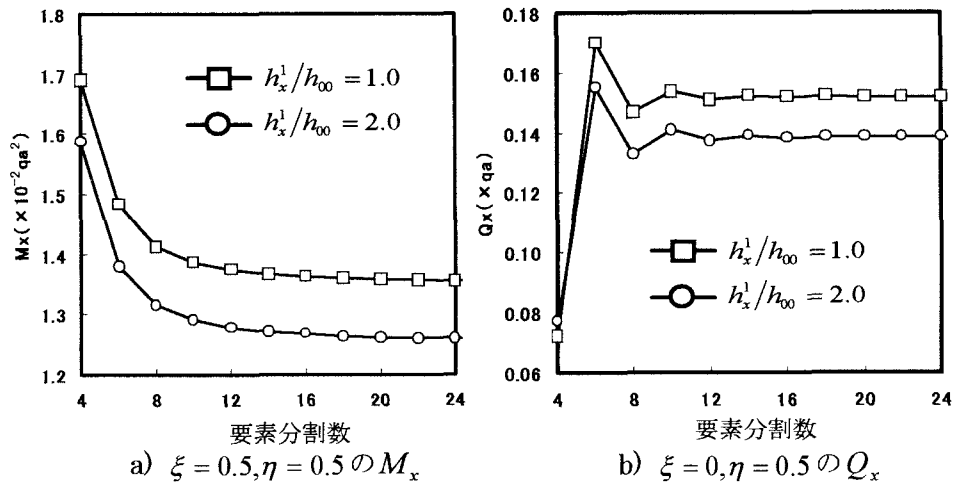


図-2 変厚斜板の曲げモーメント M_x とせん断力 Q_x の収束性：
 $b/h_{00}=10, a/b=1.0, \theta=45^\circ$

表-1 等厚斜板のたわみの精度比較： $b/h_{00}=100, a/b=1.0$

θ (°)	Reference	W (0.5,0.5)
15	present	18.00
	T. S. Butalia ²⁾	17.95
30	present	12.34
	T. S. Butalia	12.28
45	present	6.080
	T. S. Butalia	5.997
60	present	1.756
	T. S. Butalia	1.704
乗数		$\times 10^{-3} qa^4/D_x^{00}$

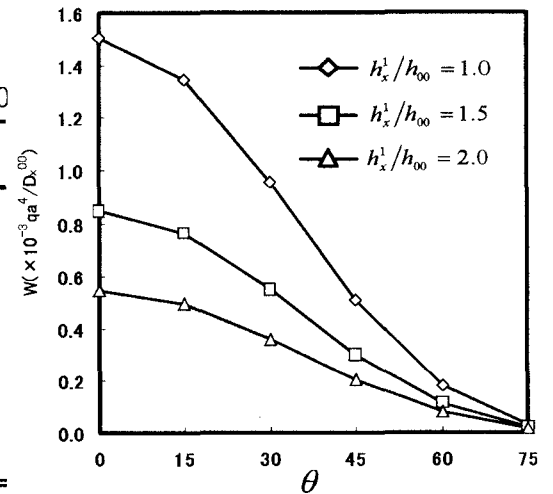


図-3 変厚斜板のたわみに与える変厚比と斜角の影響： $a/b=1.0, b/h_{00}=10$
 $\xi=0.5, \eta=0.5$

表-2 変厚斜板のたわみと断面力： $a/b=1.0$

θ (°)	b/h_{00}	h_x^1/h_{00}	W	M_x (0.5, 0.5)	M_y	M_x (0.5, 0)	M_y (0.5, 0)	Q_x (0, 0.5)	Q_y (0.5, 0)
30	10	1.0	0.955	1.864	1.951	-0.937	-3.119	0.266	0.306
		2.0	0.359	1.701	1.936	-1.036	-3.444	0.234	0.317
	100	1.0	0.771	1.839	1.926	-0.952	-3.170	0.274	0.327
		2.0	0.238	1.649	1.872	-1.068	-3.555	0.241	0.338
60	10	1.0	0.180	0.782	0.879	-0.209	-0.671	0.067	0.133
		2.0	0.081	0.759	0.835	-0.260	-0.835	0.062	0.145
	100	1.0	0.110	0.757	0.863	-0.191	-0.620	0.066	0.142
		2.0	0.034	0.704	0.806	-0.239	-0.769	0.061	0.134
乗数			$\times 10^{-3} qa^4/D_x^{00}$	$\times 10^{-2} qa^2$	$\times 10^{-2} qa^2$		qa		

θ は 15° から 75° まで変化させている。これより、 h_x^1/h_{00} と θ を増大させるとたわみは小さくなる。これは、 θ が増大すると板の面積が小さくなることに関係があると思われる。

4. まとめ 1) 本手法を用いれば、変厚斜板のたわみと断面力の安定した収束性と精度が得られる。
2) 幅厚比が増大すると、たわみは大きく影響を受けるが、断面力についてはさほどその影響を受けない。
3) 斜角が増すと、斜板のたわみや断面力が小さな値を示す。

参考文献 1) 木村他，構造工学論文集，Vol. 48A, 19-26, 2002. 2) T. S. Butalia. et. al. : Comput. & Struct., Vol. 34, 23-49, 1990. 3) 水澤他，構造工学論文集，Vol. 46A, 25-32, 2000.