１次の区分多項式を利用した柱の座屈解析について

正会員　名古屋市立大学大学院芸術工学研究科　草間晴幸

１．はじめに

著者は、参考文献１）、２）に見られるように、学生、技術者、出発点に立つ研究者を対象として、有限要素法関連の解りやすい教育用図書の作成に努めてきた。しかしながら、その内容は単に教育用レベルに留まらず、研究シーズが多分に包含されているとの評価も受けており、卒業研究、修士論文、学術論文の参考文献に引用された場合も数多く存在する。

現在、新たな教育用資料開発を進めているが、本研究は、その開発作業の過程において発見されたいくつかの興味ある項目の中から具体的な例題として、１次の区分多項式を利用した柱の座屈解析について報告するものである。なお、１次の区分多項式を利用した１次元境界値問題の解析については文献 2）に詳細に述べられているので参照して頂きたい。

２．数理モデルとマトリックス表現式

長さ L、曲げ剛度 EI の弾性柱に軸圧縮荷重 P が作用した場合の座屈に対する支配方程式は次のようになる。

$$\frac{d^2v}{dx^2}+pv=0 \qquad (0\le x\le 1) \qquad p=PL^2/EI \tag{Eq・1}$$

ここで、x は柱の中立軸を座標軸とした座標変数であり、長さ L によって無次元化されている。

（Eq・1）に対して、重み付き残差法の１つである Galerkin 法を適用すると次式を得る。

$$\int_D W_nRdD=\int_0^1 W_n(\frac{d^2\hat{v}}{dx^2}+p\hat{v})dx=0 \tag{Eq・2}$$

ここで、Wn は重み関数、R は残差、$\hat{v}$は柱のたわみ v の近似関数である。

（Eq・2）を弱形式で表現すると次式となる。

$$\int_0^1\frac{dW_n}{dx}\frac{d\hat{v}}{dx}dx-p\int_0^1 W_n\hat{v}dx=-[W_n\frac{d\hat{v}}{dx}]_0^1 \tag{Eq・3}$$

（Eq・1）の近似解として、次式で表される１次の区分多項式を利用する。

$$\hat{v}=\sum_{m=1}^{M}(v_m\phi_1+v_{m+1}\phi_2) \tag{Eq・4}$$

ここで、M は分割された解析領域の要素数、m は要素番号、v_mおよび v_{m+1}はそれぞれ要素 m の両端における v の値、ϕ_1およびϕ_2はそれぞれ以下の式で表現される形状関数である。

$$\phi_1=(1-\xi)/2 \qquad \phi_2=(1+\xi)/2 \tag{Eq・5}$$

上式で表現される１次の区分多項式を Fig-1 に示す。図中、λ は要素の長さ、ξ は要素の局所座標変数である。Galerkin 法の定義により重み関数として形状関数を適用し、（Eq・3）をマトリックス表現した場合、各要素のマトリックス方程式は次式となる。

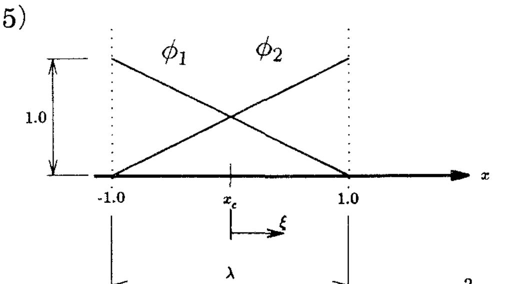

Fig-1

$$[[K_e]-p[G_e]]\{V_e\}=\{F_e\} \tag{Eq・6}$$

係数マトリックス $[K_e]$ と $[G_e]$ の (i,j) 行列要素はそれぞれ次式である。

$$K_{ij} = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}dx = \frac{2}{\lambda}\int_{-1}^{1}\frac{d\phi_i}{d\xi}\frac{d\phi_j}{d\xi}d\xi \qquad \text{(Eq・7)}$$

$$G_{ij} = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i\phi_j dx = \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1}\phi_i\phi_j d\xi \qquad \text{(Eq・8)}$$

上式に（Eq・5）を適用すると、（Eq・6）の係数マトリックスは次式のように単純な形となる。

$$[K_e] - p[G_e] = \alpha\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \beta\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(Eq・9)}$$

ここで、　$\alpha = 1/\lambda$、　$\beta = p\lambda/6$　である。

具体的な解析例として解析領域を 4 等分割した場合、（Eq・6）で表される各要素のマトリックス方程式を重ね合わせることによって得られる全体マトリックス方程式が持つ全体係数マトリックスは以下のようになる。

$$[K] - p[G] = \alpha\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \beta\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(Eq・10)}$$

境界条件および構造対称条件を考慮すると、両端単純支持柱の座屈条件式は以下のようになる。

$$det\left[\ \alpha\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - \beta\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\ \right] = 0 \qquad \text{(Eq・11)}$$

この固有方程式の最小固有値は次の値となる。

$$\beta/\alpha = (5 - 3\sqrt{2})/7 \qquad \text{(Eq・12)}$$

この値より、両端単純支持柱の座屈荷重は次の値となる。

$$P_{cr} = 1.052\pi^2 EI/L^2 \qquad \text{(Eq – 13)}$$

厳密解に比べて５％の誤差を有している。

３．おわりに

１次の区分多項式を利用して、構造力学の最も基本的な問題である両端単純支持柱の Euler 荷重を計算した。基本的な問題ではあるが、著者の調べた範囲では、本稿で紹介した内容のものは見当たらなかった。さらに、２次や３次の区分多項式を固有値解析に応用する場合の工夫を見いだしたが、別の機会に発表する。また、１次の区分多項式は本質的に１次の B-Spline 関数であるが、近年益々注目されている CG プログラミングとの関連からも再度見直している。

[参考文献]

1) 草間晴幸他 2 名、初学者のための有限要素解析事始め、ＨＢＪ出版局、１９９１

2) 草間晴幸・谷山健、有限帯板法、日刊工業新聞社、１９９４

3) O.C.Zienkiewicz・K.Morgan 著、伊理正男他訳、有限要素と近似、ワイリージャパン、１９８４