Spline 要素法を用いた周辺自由な平板の振動解析

大同工業大学　都市環境デザイン学科　　正員　○水澤富作、正員　近藤八重

1．はじめに　周辺自由な板は、振動法による材料の動弾性係数や損失正接などの物性値の計測や航空宇宙などの分野に用いられている。このような周辺自由な平板の振動問題 [1]は、クラドニーによる振動実験の研究以来、多くの研究成果が発表されている。しかしながら、剛体モードを含む自由平板の振動問題では、厳密解を求めることが困難になるので、等厚な等方性薄板を対象に Ritz 法や Galerkin 法などの数値解析法が適用されている。 最近、Gorman ら [2]は、重ね合わせ法を用いて、等方性 Mindlin 長方形の振動解析を行っている。しかしながら、周辺自由な変厚板や直交異方性板の研究は、少ないように思われる。

本文では、Spline 要素法を適用して、周辺自由な直交異方性 Mindlin 板の振動解析を行い、 本手法の収束性や解析精度について検討し、実験結果との比較を行っている。 また、自由板の振動特性に与える変厚や異方性の影響などについて明らかにしている。

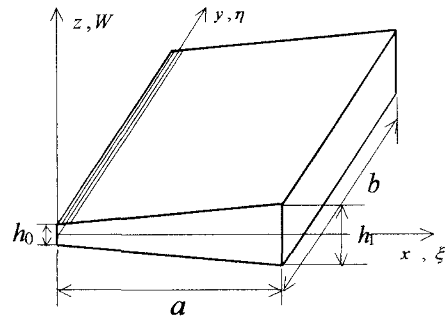


図-1　変厚板と座標系

2．式の定式化　ここでは、Spline 要素法と Mindlin 板理論を用いて、式の定式化をしている [3]。Mindlin 板理論で定義される独立した３つの変位関数$W'=W/b,\theta_x,\theta_y$は、正規化した B-spline 関数を用いて仮定する。**図−1** に示すように、一方向に変厚な直交異方性 Mindlin 板のひずみエネルギーUと運動エネルギーTは，無次元座標系$(\xi=x/a,\eta=y/b)$を用いて次式で与えられる。

$$\begin{aligned}U=&\left(abD_x^o/2a^2\right)\int_0^1\int_0^1\Big[H(\xi)^3\left(\partial\theta_x/\partial\xi\right)^2+(a/b)^2\left(E_y/E_x\right)H(\xi)^3\left(\partial\theta_y/\partial\eta\right)^2\\&+2(a/b)\nu_{yx}H(\xi)^3\left(\partial\theta_x/\partial\xi\right)\left(\partial\theta_y/\partial\eta\right)+4\left(1-\nu_{xy}\nu_{yx}\right)\left(G_{xy}/E_x\right)H(\xi)^3\left\{\left(\partial\theta_y/\partial\xi\right)+(a/b)\left(\partial\theta_x/\partial\eta\right)\right\}^2\\&+12\left(1-\nu_{xy}\nu_{yx}\right)\kappa\left(b/h_o\right)^2(a/b)^2\left(G_{xz}/E_x\right)H(\xi)\left\{(b/a)\left(\partial W'/\partial\xi\right)+\theta_x\right\}^2\\&+12\left(1-\nu_{xy}\nu_{yx}\right)\kappa\left(b/h_o\right)^2(a/b)^2\left(G_{yz}/E_x\right)H(\xi)\left\{\left(\partial W'/\partial\eta\right)+\theta_y\right\}^2\Big]d\xi d\eta\end{aligned}\tag{1}$$

$$T=(\rho h_o/2)\omega^2ab^3\int_0^1\int_0^1\{H(\xi)W'^2+(1/12)(h_o/b)^2H(\xi)^3(\theta_x{}^2+\theta_y{}^2)\}d\xi d\eta\tag{2}$$

ここで，$H(\xi)$は板の変厚関数、ρは密度であり，ωは円振動数(rad/sec)である． 変厚板の全ポテンシャルエネルギーΠは，次式で表される。

$$\Pi=U-T\tag{3}$$

したがって，変位関数を式（3）に代入し，Πを極値化すれば，次式の固有方程式が得られる．

$$\partial\Pi/\partial\{\Delta\}_{mn}=\sum_{m=1}^{ix}\sum_{n=1}^{iy}\sum_{r=1}^{ix}\sum_{s=1}^{iy}([K]_{mnrs}\{\Delta\}_{mn}-n^{*2}[M]_{mnrs}\{\Delta\}_{mn})=0\tag{4}$$

ここで，n*は振動数パラメータであり，$\omega b^2\sqrt{\rho h_o/D_o^x}$ で表している．ただし、h_oは基準板厚であり、$D_o^x=E_xh_o{}^3/[12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})]$ である。 ダブル QR 法を適用して、式（4）で与えられた固有方程式の固有値計算を行い、また逆反復法により固有値ベクトルを求めている。

3． 数値計算例および考察　数値計算例に用いたせん断修正係数は、5/6 に仮定している。

表-1 には、正方形板の振動数パラメータ n*の収束性に与える要素分割数の影響が示してある。ここで、幅厚比 b/h は、50 に仮定し、比較のために、Gorman らの重ね合わせ法による解析解 [2] も示してある。また、SYM は対称モード、ASYM は逆対称モードであり、S−A は、対称—逆対称モードを示している。これより、本手法の値は、要素分割数を高めると、一定値への安定した収束性が示され、また Gorman らの解とも良く一致した結果が得られている。**表-2** には、精密騒音計と加速度計を用いて、板中央点に球体の衝突を受ける鋼板（200x200x4.3mm）の音圧波形および加速度波形を FFT 解析して求めた卓越振動数(Hz)が、本

手法の結果と比較されている。実験で求めた音圧と加速度の周波数スペクトルは、良く一致した結果を示し、またその卓越周波数の値は、理論値とよく一致している。また、**図−2** は、本手法を用いて求めた正方形鋼板の振動モード形状と振動数(Hz)を示している。ただし、図で、濃淡の境が節線になる。表-2 で示した実験結果は、板の中央点を打撃して求めているので、対称モ-ドの卓越周波数のみが励起されている。

表—1　正方形板の振動数パラメータの収束性と精度比較；b/h=50, ν=0.333

	振動モード*	要素分割数(Mx=My) 8×8	12×12	16×16	20×20	Gorman[2]
1st	ASYM	13.27	13.13	13.08	13.07	13.06
2nd	SYM	19.52	19.65	19.16	19.20	19.20
3rd	SYM	24.97	24.34	24.48	24.39	24.37
4th	S-A	34.55	34.04	33.95	34.00	33.91
5th	S-A	63.93	61.68	60.92	60.68	60.63
6th	SYM	66.29	62.53	62.25	62.23	61.91
7th	ASYSM	71.70	68.39	67.80	67.61	67.36
8th	ASYSM	82.81	77.57	76.74	76.50	76.25
9th	S-A	108.5	104.1	103.3	103.0	102.5
10th	SYM	140.3	120.1	116.7	115.9	115.4

＊ASYM:逆対称, SYM:対称, S-A:対称−逆対称

表-2 **鋼板の対称モードに関する振動数(Hz)の実験値との比較**

騒音計	加速度計	理論値
650	650	643
1675	1675	1674
3275	3275	3227
4425	4400	4400
7250	7225	7257
7900	7900	7861
8975	8925	8962
11900	11850	11790

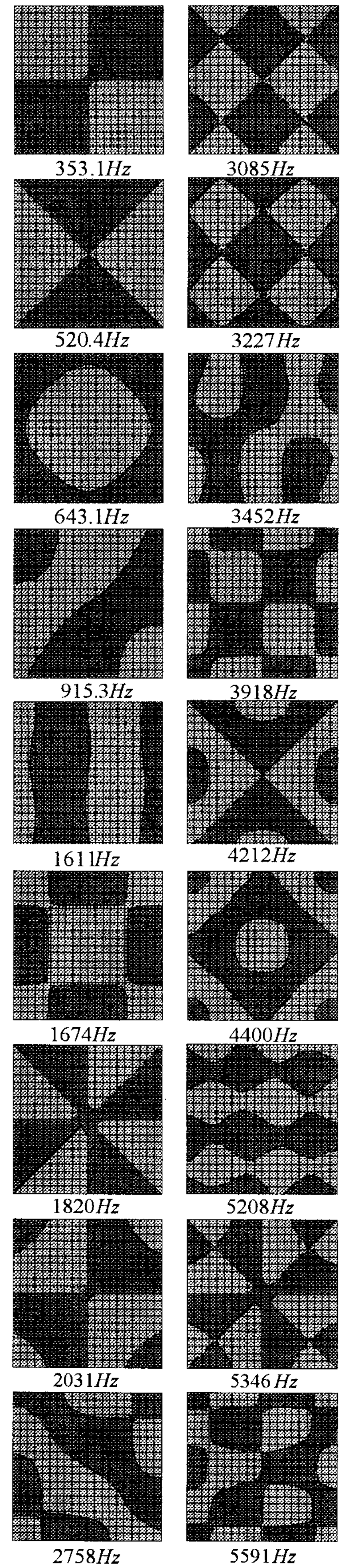
表-3 変厚板の振動数パラメータに与える変厚比δの影響：a/b=1.0

δ	b/ho	1st	2nd	3rd	4th	5th
1.0	50	13.07	19.20	24.39	34.00	34.01
	25	12.95	19.11	24.26	33.49	33.49
	12.5	12.62	18.80	23.78	32.18	32.18
2.0	50	19.66	29.13	36.22	49.74	50.52
	25	19.31	28.62	35.72	48.96	49.52
	12.5	18.61	27.77	34.46	45.69	46.82

表−3 には、一方向に変厚な正方形厚板の振動数パラメータ n*に与える変厚比 $\delta = h_1 / h_0$ と幅厚比 b / h_0 の影響が示してある。ここで、b / h_0 は、50,25,12.5 に仮定し、δ は 1.0 と 2.0 としている。これより、振動数パラメータは、変厚比や幅厚比の影響を受ける。また、異方性を有する柾目正方形板の振動数パラメータ n*に与える幅厚比 b / h_0 の影響について検討してみたが、等方性正方形板は、対角軸を２つの対称軸としたモード形状が現れるが、変厚や異方性を有する正方形板では、対角軸が対称性を失うので、x 軸と y 軸に平行な軸がモード形状の対称軸になる。

４．**まとめ**　本文で得られた結果を示すと、以下の通りである。

(1)　Spline 要素法を用いれば、周辺自由な板の精度の高い振動解析が可能である。(2) 騒音計や加速度計から求めた周波数スペクトルの卓越周波数は、理論解析による振動数と非常に良く一致した結果が得られる。(3) 一定厚さの正方形の振動モード形状は、変厚や異方性の影響により、異なった形状が示される。



図−2　正方形鋼板の振動モード形状と振動数(Hz)

参考文献　1）Leissa,A.W.:Vibration of plates, NASA SP-160,1969.
2）Gorman, D.J. and Ding, W.: Accurate free vibration analysis of the completely free rectangular Mindlin plate, J. Sound. Vib., Vol. 189, pp. 341-353,1996.　3）近藤他；Spline 要素法を用いた変断面性状を有する長方形木板の振動解析、応用力学論文集、Vol. 4, pp. 183-194, 2001.