S 言語を用いた逆問題解析プログラムの作成

岐阜大学工学部　学生　畔柳　薫
正員　本城　勇介

1. まえがき

地盤工学で取り扱う多くの逆解析は、不適切性を有する。著者らのグループではこの不適切性を克服するため、拡張ベイズ法と呼ばれる方法により、事前情報を任意の強度で観測データに重ね合わせることによりこの問題を解決することを提案している(本城、2001)。

今回の研究では、この問題について、次の 2 点を検討した。

(1) 従来からプログラムを FORTRAN で作成してきた。これを統計解析用オブジェクト指向言語 S で作成することにより、プログラム作成の省力化を検討した。

(2) 拡張ベイズ法を比較的簡単な例題に適用し、その挙動の特徴をより明確に説明することを試みた。

2. 拡張ベイズ法による逆解析

2-1 理論

不適切性を克服するための一つの方法として、事前情報の導入がある。これを定式化するのがベイズ統計学に準拠したベイズ法である。事前情報と観測データは全く異種の情報で、相対的な重み付けを合理的に行うことは非常に難しい。しかし、相対的な重みを調整するパラメータ λ^2 を含む次のような評価関数(1)を最小化することにより、推定量(2)を求めることができる。

$$J(\theta)=(y-X\theta)^T V_\varepsilon^{-1}(y-X\theta)+\lambda^2(\theta-\theta^*)^T V_\theta^{-1}(\theta-\theta^*) \quad \text{---------} (1)$$

$$\hat{\theta}=\theta^*+PX^T V_\varepsilon^{-1}(y-X\theta^*) \quad \text{--------} (2) \qquad P=(X^T V_\varepsilon^{-1}X+\lambda^2 V_\theta^{-1})^{-1}$$

超パラメータ λ の重みを決定する一つの有力な方法として、ABIC(赤池ベイズ情報量基準)がある。

$$ABIC=n\ln(2\pi)+n\ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2)-\ln\left|\lambda^2 V_\theta^{-1}\right|-\ln\left|V_\varepsilon^{-1}\right|+\ln\left|X^T V_\varepsilon^{-1}X+\lambda^2 V_\theta^{-1}\right|+2\dim(\lambda)$$

λ^2 は ABIC の最小化により最適化される。

2-2 S 言語によるプログラミング

S 言語はオブジェクト指向の言語であり、特に統計計算はいくつかのオブジェクトを組み合わせることで極めて効率的に行うことができ、FORTRAN に比べ簡単かつ短くプログラミングすることができる。例として拡張ベイズ法をプログラミングしたのを右の図-1 に示した。従来 FORTRAN プログラムではこの計算に数百行のプログラムが必要であった。

図-1　S 言語によるプログラミング

```
#--------   拡張ベイズ解  ---------
#入力      x            :  観測行列
#          y            :  観測値
#          Prior        :  事前情報
#          super.para   :  超パラメータ
#          v1           :  誤差分散
#          v2           :  事前分散
#出力      thetahato    :  ベイズ推定量

EBM <- function(x, y, Prior, super.para)
    {p <- t(x) %*% v1 %*% x + 0.01 *
            super.para * v2
     P <- solve(p)  #  行列pの逆行列
     thetahato <- Prior + P %*% t(x) %*%
                   v1 %*% (y - x %*% Prior)}
```

3. 計算例

3-1 例題の説明

ここに取り上げた例題は図-2 に示すような 2 つの連結したばねのモデルであり、それぞれ節点 1 と 2 に力 f_1 と f_2 を作用させたときの変位を u_1 と u_2 とする。この問題では 3 組の力 f_1 と f_2 の組み合わせを作用させたときの u_2 の値とを観測し、この情報よりばね定数 k_1 と k_2 を推定する。

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad u_2 = 2$$

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad u_2 = 5$$

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix} \qquad u_2 = 7$$

$$u_1 = \frac{f_1}{k_1} + \frac{f_2}{k_1}$$

$$u_2 = \frac{f_1}{k_1} + \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) f_2$$

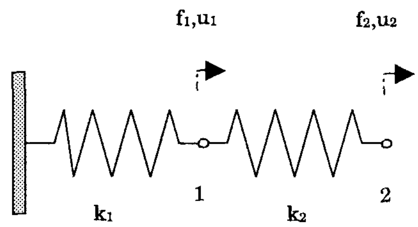

図-2　ばねモデル

ここに示すケース・スタディー①､②は 3 組の事前情報と、4 種類の大きさの異なるノイズを持つデータを準備した。事前情報に関しては、PG,PM,PW の順に事前平均は真値から離れる。一方、ノイズについては N1/2,N1,N3,N5 の順に観測値に付加されるノイズが大きくなる。

①　事前情報の良悪

ケース		k_1	k_2
良	*PG*	1.8	1.4
中	*PM*	2.7	2.1
悪	*PW*	3.6	2.8

②　観測雑音の大小

u_2(N0)	乱数(1.0)	N1/2	N1	N3	N5
2.0	-0.115	1.9425	1.885	1.655	1.425
5.0	0.789	5.3945	5.789	7.367	8.945
7.0	-0.606	6.697	6.394	5.182	3.97

3-2　結果と考察

表の各ケースにおいて ABIC の最小値により事前情報と観測データの相対的な重みを決定している。

ノイズの大きい N5 は別として、他のケースの場合は的確な事前情報が与えられたときに最小の ABIC が与えられた。すなわち、ABIC はより的確な事前情報を判断する上で有用である。

的確な事前情報が与えられる場合の方が、大きなλを取っている。これは相対的に大きな重みを置く方が良いことを ABIC は自動的に調整する。

表　各ケースでのベイズ推定量パラメータ

ケース	ABIC	$\lambda^2(\times 10^{-2})$	$1/\hat{k}_1$	推定誤差 $1/\hat{k}_1$	$1/\hat{k}_2$	推定誤差 $1/\hat{k}_2$
$PG-N0$	5.027	2^{14}	1.84	0.14	1.48	0.212
$PM-N0$	9.718	2^{9}	1.88	1.974	1.56	2.658
$PW-N0$	12.088	2^{7}	1.74	3.389	1.72	4.542
$PG-N1/2$	3.729	2^{16}	1.82	4.198×10^{-2}	1.42	6.74×10^{-2}
$PM-N1/2$	9.066	2^{8}	2.09	2.734	1.25	3.664
$PW-N1/2$	11.627	2^{7}	2.14	3.398	1.19	4.542
$PG-N1$	5.059	2^{37}	1.8	2.246×10^{-8}	1.4	3.712×10^{-8}
$PM-N1$	9.514	2^{8}	2.41	2.734	0.82	3.664
$PW-N1$	11.563	2^{6}	2.58	3.871	0.61	5.767
$PG-N3$	11.933	2^{31}	1.8	1.437×10^{-6}	1.4	2.376×10^{-6}
$PM-N3$	13.362	2^{4}	4.68	4.324	-2.09	5.767
$PW-N3$	13.508	2^{4}	4.69	4.324	-2.1	5.767
$PG-N5$	14.764	2	6.94	4.477	-4.97	5.97
$PM-N5$	14.643	2	6.95	4.477	-4.97	5.97
$PW-N5$	14.619	2	6.95	4.477	-4.97	5.97

4.　むすび

上記結果のエントロピー的考察及び、非線形問題の拡張ベイズ法の結果については、発表時に報告する。

参考文献

本城勇介(2000)｢逆問題と情報量エントロピー｣,｢土木工学における逆問題入門｣(土木学会)PP.59-80