確率微分方程式による境界積分方程式法のための境界データの作成

福井大学工学部　学生会員　○　佐藤 大輔
福井大学工学部　正会員　　　福井 卓雄

本報文では, 大規模問題の境界積分方程式の解析のために, 3 次元曲面上のデータを効率的に作成する手法について考察する。ここでは, 田中ら [1, 2] によって提案された, 確率微分方程式を用いた曲面のサンプリング点生成手法について検討する。田中らの方法は, 一般的な曲面について極めて高速にサンプリング点を生成できる方法であり, 境界のモデル化のための一手法として期待できるものである。

1　境界積分方程式法

一般に, 与えられた境界値問題に対する境界積分方程式は

$$\frac{1}{2}u(\boldsymbol{x}) = \overset{\circ}{u}(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial B} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})s(\boldsymbol{y})\,dS_y - \int_{\partial B} S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u(\boldsymbol{y})\,dS_y \tag{1}$$

のような形となる。ここで, G は基本解, S は二重層核であり, $\overset{\circ}{u}$ は特解, s は境界上の Neumann データである。ここでは, この方程式を

$$\frac{1}{2}u(\boldsymbol{x}_i) = \overset{\circ}{u}(\boldsymbol{x}_i) + \sum_{j=1}^{N} G(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)s(\boldsymbol{x}_j)\,\Delta S_j - \sum_{j=1}^{N} S(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)s(\boldsymbol{x}_j)\,\Delta S_j \tag{2}$$

のように近似して解くことを考える。ただし, $i=j$ のときには, G, S は近似値をとるものとする。

ここでの問題は, サンプリング点 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_N$ を効率良く生成する方法をつくり出すことである。

2　確率微分方程式による曲面上の点のサンプリング

2.1　確率微分方程式

3 次元空間の曲面 S が陰関数表示

$$F(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{3}$$

で与えられているとする。この曲面上に均等に点をサンプリングして, その点の集合上で境界積分方程式を近似的に解くことが現在の目標である。

田中ら [1] は, 陰関数表示された曲面上の点をサンプリングする手法として, サンプリング点の変位量 dx_i を確率過程と見て, 変移確率微分方程式

$$dx_i(t) = dx_i^T(t) + dx_i^S(t) + dx_i^N(t) \tag{4}$$

を解くことにより一連の点列を決定する方法を提案している。まず, この確率微分方程式の意味について述べよう。以下の記述においては, 空間ベクトル（テンソル）の指標に対しては総和規約を適用する。

右辺の第 1 項は接平面項

$$dx_i^T(t) = P_{ij}(\boldsymbol{x}(t))dw_j(t) \tag{5}$$

である。ここに, P_{ij} は, $\nabla F(\boldsymbol{x}(t))$ を F の勾配として,

$$P_{ij}(\boldsymbol{x}(t)) = \delta_{ij} - \frac{1}{|\nabla F(\boldsymbol{x}(t))|^2}\frac{\partial F(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_i}\frac{\partial F(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_j} \tag{6}$$

であり, dw_i は正規乱数ベクトルで, 条件

$$\langle dw_i(t)\rangle = 0, \qquad \langle dw_i(t)\,dw_j(t)\rangle = 2D\delta_{ij}\,dt \tag{7}$$

を満足する。D は分散定数であり，確率密度 $p_{dw}(\boldsymbol{x})$ は

$$p_{dw}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\prod_{i=1}^{3}d\xi_i=\prod_{i=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi(2D\Delta t)}}\exp\left[-\frac{\xi_i^2}{2(2D\Delta t)}\right]d\xi_i \tag{8}$$

である。

右辺第 2 項は，第 1 項で正規乱数を使うことに対する伊藤積分の意味の補正項であって，

$$dx_i^S(t)=-\frac{D}{|\nabla F(\boldsymbol{x}(t))|^2}\frac{\partial F(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_i(t)}\frac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_j\partial x_k}P_{kj}(\boldsymbol{x}(t)) \tag{9}$$

となる。

最後に，右辺第 3 項は垂直項であって，

$$dx_i^N(t)=-KD\frac{\partial F(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_i(t)}\frac{F(\boldsymbol{x}(t))}{|\nabla F(\boldsymbol{x}(t))|^2} \tag{10}$$

となる。ここに，K は制御パラメータである。この項は，サンプル点を曲面近くに拘束する働きをする。

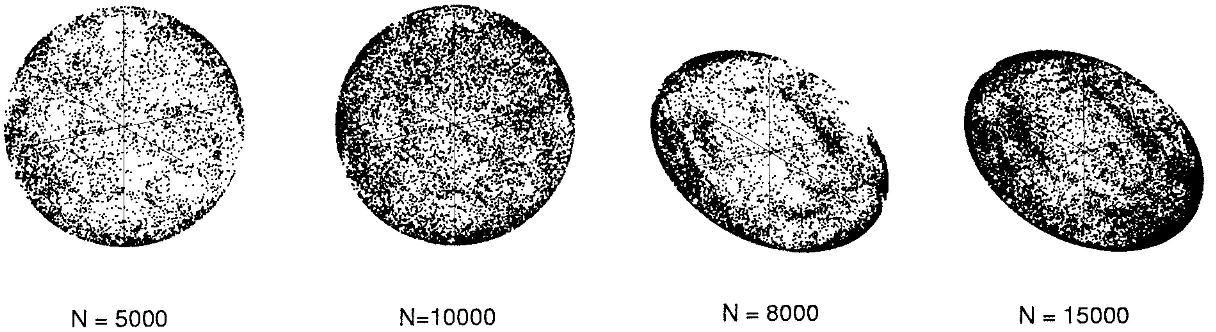
2.2 計算法

サンプル点の計算の手順は次のようになる。

1. 初期条件として，$\boldsymbol{x}(0)$ を与える。ただし，$|\nabla F(\boldsymbol{x}(0))|\neq 0$ となるようにする。
2. 各ステップごとに，曲面のパラメータおよび $d\boldsymbol{w}$ を計算し，(4) により増分 $d\boldsymbol{x}$ を計算して，新しい点 $\boldsymbol{x}$ の近似値を得る。
3. Newton 法により $\boldsymbol{x}$ を垂直線に沿って曲面上に移動させる。
4. 2, 3 を必要なだけ繰り返す。

2.3 計算例

図–1 に，球面と回転楕円体面のサンプリングを行なった例を示す。球面の半径は $a=1$，回転楕円体の長径は $a=2$，短径は $b=1$ である。パラメータとして，$D=1$，$\Delta t=0.01$，$K=1/D\Delta t$ とした。サンプル点の配置に多少の偏りが見られるが、サンプル点はほぼ曲面全体に配置されており、曲面の輪郭を良くとらえている。この手法が曲面上にサンプリング点をとるのに有効に利用できることがわかる。



図–1 球面および回転楕円体面のサンプリング例

現在，サンプル点の配置を均質化する方法，ならびに，境界積分方程式法への応用についてプログラムを開発中である。計算結果の詳細については当日報告する。

参考文献

[1] Tanaka, S, A. Morisaki, S. Nakata, Y. Fukuda, and H. Yamamoto : Sampling inplicit surfaces base on stochastic differential equations with converting constraint, *Computers & Graphics*, **24**, pp. 419–431, 2000.

[2] Tanaka, S, T. Nakamura, M. Ueda, H. Yamamoto and K. Shino : Application of the stochastic sampling method to various implicit surfaces, *Computers & Graphics*, **25**, pp. 441–448, 2001.