境界要素法を用いた弾性問題の均質化法の定式化

福井大学大学院　学生会員　○　木畑 貴道
福井大学工学部　正会員　　　福井 卓雄

均質化法は、内部に微視的構造を持つ材料の解析に広く用いられており、このような材料の解析を合理的かつ簡便に実行するのに有効な手法である。均質化法は有限要素法として実現されることが多いが、その考え方は有限要素法だけに限ったものではない。本研究では、境界要素法を用いた弾性問題の均質化法の定式化を試みる。

1　弾性問題の均質化法の基礎式

1.1　マクロ問題とマイクロ問題

マクロ境界値問題　マクロ変位およびひずみを u_i^0, $\bar{\epsilon}_{ij}$, 平均応力および物体力を $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{b}_i$ とするとき、境界値問題は

$$\bar{\sigma}_{ij,j} + \bar{b}_i = 0, \qquad \bar{\sigma}_{ij} = E^H_{ijkl}\bar{\epsilon}_{kl}, \qquad \bar{\epsilon}_{ij} = u^0_{(i,j)}(\boldsymbol{x}) \qquad \text{in } B, \tag{1}$$

$$u_i^0 = \hat{u}_i \qquad \text{on } \partial B_1, \qquad \bar{\sigma}_{ij}n_j = \hat{t}_i \qquad \text{on } \partial B_2 \tag{2}$$

である。ここに, E^H_{ijkl} は均質化弾性係数、$\hat{u}_i$, $\hat{t}_i$ は境界上で与えられた変位および応力ベクトル, n_i は境界上の外向き単位法線ベクトルである。また、通常の直交テンソル表記を用いている。

マイクロ問題　マイクロ変位を u_i^1, 応力およびひずみを σ^0_{ij}, ϵ^0_{ij} とするとき、マイクロ場の基礎式は

$$\sigma^0_{ij,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0, \qquad \sigma^0_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = E_{ijkl}(\boldsymbol{y})\epsilon^0_{kl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \qquad \epsilon^0_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \bar{\epsilon}_{ij}(\boldsymbol{x}) + u^1_{(i,j)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \qquad \text{in } Y \times B \tag{3}$$

となる。ここに、E_{ijkl} は弾性係数であり、ユニットセル領域 Y の位置変数を $\boldsymbol{y}$ とした。また、マイクロ変位 u_i^1 は Y-periodic であると仮定する。

1.2　均質化と局所化

均質化　マクロ境界値問題 (1), (2) は、均質化弾性係数 E^H_{ijkl} が与えられれば、通常の境界値問題として解くことができる。弾性体が内部に微視構造を持つ場合に、マイクロ問題を利用して E^H_{ijkl} を決定する操作が均質化である。

方程式 (3) において、マイクロ変位 u_i^1 が Y-periodic であると仮定すると、マクロひずみ $\bar{\epsilon}_{ij}$ を与えて u_i^1, ϵ^0_{ij}, σ^0_{ij} を $\boldsymbol{y}$ だけの関数として解くことができる。とくに、$\bar{\epsilon}_{ij}$ としてテンソル基底 I^{kl}_{ij} を与える場合には、得られる変位 $u_i^1(k,l) = \chi_i^{kl}$ はマイクロ構造の変形の特性を表すものとなり、特性関数と呼ばれる。ユニットセル領域 Y の特性関数 χ_i^{kl} を使って, 均質化弾性係数は

$$E^H_{ijkl} = \left\langle E_{ijmn}\left(I^{kl}_{mn} - \frac{\partial \chi^{kl}_m}{\partial y_n}\right)\right\rangle \tag{4}$$

により決定される。ここに、

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V}\int_Y f(y)\,dV \tag{5}$$

はユニットセル領域 Y における体積平均である。

局所化　マクロ境界値問題が解かれれば、マクロひずみ $\bar{\epsilon}_{ij}(\boldsymbol{x})$ が位置 $\boldsymbol{x}$ の関数として得られる。このとき、(3) を用いてマイクロ場における u_i^1, ϵ^0_{ij}, σ^0_{ij} を決定するのが局所化である。

2 境界要素法による均質化

2.1 マイクロ問題の解析

方程式 (3) において、u_i^1 が Y-periodic であることを仮定して、マクロひずみ $\bar{\epsilon}_{ij}$ に対する u_i^1, ϵ_{ij}^0, σ_{ij}^0 を解くことを考えよう。まず、問題 (3) を境界要素法で扱いやすい形に書き直す。マイクロ変位 u_i^1 によるひずみを $\epsilon_{ij}^1 = u_{(i,j)}^1$, 応力を $\sigma_{ij}^1 = E_{ijkl}\epsilon_{kl}^1$ とし、定ひずみ $\bar{\epsilon}_{ij}$ による応力を $\sigma_{ij}^* = E_{ijkl}\bar{\epsilon}_{kl}$ とする。このとき、(3) は

$$\sigma_{ij,j}^1 + f_i^* = 0, \qquad \sigma_{ij}^1 = E_{ijkl}\epsilon_{kl}^1, \qquad \epsilon_{ij}^1 = u_{(i,j)}^1 \qquad \text{in } Y \times B \tag{6}$$

と書くことができる。ここに、$f_i^* = \sigma_{ij,j}^*$ は定ひずみ条件により生じる仮想的な物体力である。

仮想物体力の決定 弾性係数が区分的に一定である場合には、f_i^* は比較的簡単に決まる。例として、ユニットセル領域 Y が空孔を含む場合およびインクルージョンを含む場合について考えよう。

まず、空孔の場合には、領域内部で σ_{ij}^* は一定であるので、$f_i^* = \sigma_{ij,j}^* = 0$ である。空孔境界上では、応力ベクトルは $\sigma_{ij}^0 = 0$ となるので、境界条件は

$$\sigma_{ij}^1 n_j = -\sigma_{ij}^* n_j \tag{7}$$

である。すなわち、仮想物体力は空孔境界上にだけ作用する。

つぎに、インクルージョンが存在する場合、領域が Y_1 と Y_2 の二つに分かれているとする。任意のアドミシブルな変位 δu_i^1 に対して，仮想仕事は

$$\int_Y \delta u_{(i,j)}^1 \sigma_{ij}^0 \, dV = \int_{\partial Y_1} \delta u_i^1 \left(\sigma_{ij}^1 n_j + \sigma_{ij}^* n_j\right) dS + \int_{\partial Y_2} \delta u_i^1 \left(\sigma_{ij}^1 n_j + \sigma_{ij}^* n_j\right) dS$$
$$- \int_{Y_1} \delta u_i^1 \sigma_{ij,j}^1 \, dV - \int_{Y_2} \delta u_i^1 \sigma_{ij,j}^1 \, dV = 0 \tag{8}$$

となる。∂Y_1 と ∂Y_2 とは二つの領域の境界であり、法線方向以外は同じものである。したがって、インクルージョン境界上のつり合い条件は、停留条件により、

$$\sigma_{ij}^1 n_j\big|_1 + \sigma_{ij}^1 n_j\big|_2 = -\left(\sigma_{ij}^* n_j\big|_1 + \sigma_{ij}^* n_j\big|_2\right) \tag{9}$$

となる。この場合にも、仮想物体力はインクルージョン境界にだけ作用することになる。

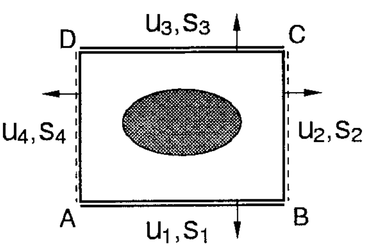
境界値の Y-periodic 性の考慮 離散化された境界要素方程式は、一般に、

$$-\mathbf{A}\mathbf{t} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathring{\mathbf{u}} \tag{10}$$

となる。ここに、$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ は基本解および二重層核による影響行列、$\mathbf{u}, \mathbf{t}$ は境界変位および応力ベクトル、$\mathring{\mathbf{u}}$ は物体力による変位である。u_i^1 の Y-periodic 性は、図–1 において、$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_3$, $\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_3 = \mathbf{0}$ および $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_4$, $\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3 = \mathbf{0}$ となる。したがって、式 (10) は

$$-(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_3)\mathbf{t}_1 - (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_4)\mathbf{t}_2 + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3)\mathbf{u}_3 + (\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_4)\mathbf{u}_4 = \mathring{\mathbf{u}} \tag{11}$$

となり、未知数と条件式の数が一致する。



図–1

2.2 均質化弾性係数の計算

上の方法により、マクロひずみとしてテンソル基底 I_{ij}^{kl} を与えて、特性関数 χ_i^{kl} を計算することができる。さらに、χ_i^{kl} から、均質化弾性係数を計算することができる。たとえば、ユニットセル領域がインクルージョンを含む場合には、

$$E_{ijkl}^H = \frac{1}{V}\int_Y \left(E_{ijkl} - E_{ijmn}\frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n}\right) dV = \frac{1}{V}\int_Y E_{ijkl}\, dV - \frac{1}{V}\int_{\partial Y_1} E_{ijmn}\chi_m^{kl} n_n \, dS - \frac{1}{V}\int_{\partial Y_2} E_{ijmn}\chi_m^{kl} n_n \, dS \tag{12}$$

により、ユニットセル境界およびインクルージョン境界上だけの積分により、均質化弾性係数を求めることができる。