高速多重極境界要素法におけるWavelet変換を用いた反復前処理法

福井大学工学部　学生会員　○　藪田 順子
福井大学工学部　正会員　　　福井 卓雄

1　はじめに

本研究では, 前論文 [1, 2] で提案した wavelet 変換を利用する前処理法を高速多重極境界要素法に適用する計算法の開発を試みる。これまでの研究から, wavelet 変換を利用した前処理法は, Dirichlet 問題および混合境界値問題において有効であり, また波動問題においても良好な成果が得られた。今回は, 2 次元ポテンシャル問題を対象として計算手法を提案する。問題となるのは, wavelet 変換後の係数行列の情報を実際に計算せずに得ることである。これを 4 分木上の wavelet 変換を導入し, 多重極展開を利用して解決する。

2　反復法の前処理

境界要素法の離散化方程式は

$$As = Bu \tag{1}$$

の形に書ける。2 次元ポテンシャル問題における係数行列 A, B の成分は, 一定要素近似および選点法を用いた場合は

$$\{A\}_{ij} = \frac{1}{2\pi}\int_{E_j} \log\frac{1}{|x_i - y|}\, ds_y \tag{2}$$

$$\{B\}_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_{E_j} \frac{n_y\cdot(x_i - y)}{|x_i - y|^2}\, ds_y \tag{3}$$

となる。Dirichlet 問題の場合は, (1) において $x = s$, $b = Bu$ とおけば,

$$Ax = b \tag{4}$$

が得られる。(4) に前処理行列 M_1^{-1},M_2^{-1} を作用させると,

$$\tilde{A}\tilde{x} = M_1^{-1}AM_2^{-1}M_2x = M_1^{-1}b = \tilde{b} \tag{5}$$

に変換できる。この行列 $\tilde{A}$ の性質が良ければ, より早く収束する。

3　Haar wavelet 変換による前処理

3.1　Haar wavelet 変換

Haar wavelet 変換は基底の変換である。ある区間が 2^n 個の区間に分割されているとする。ϕ をある分割レベルの基底とすると, ψ を操作することにより, 一段階細分された基底を生成することができる。たとえば, j レベルの基底により関数 $f_j(x)$ が

$$f_j(x) = \sum_k c_k^{(j)}\phi\left(2^jx - k\right) \tag{6}$$

で表されているとすると, 関数

$$g_j(x) = \sum_k d_k^{(j)}\psi\left(2^jx - k\right) \tag{7}$$

を使って $f_j(x)$ を一意的に分解して,

$$f_j(x) = f_{j-1}(x) + g_{j-1}(x) \tag{8}$$

と表すことができる。$j-1$ は一つ上のレベルを表す。ここで, 係数 $c_k^{(j-1)}$,$d_k^{(j-1)}$ は,

$$c_k^{(j-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(c_{2k}^{(j)} + c_{2k+1}^{(j)}\right) \tag{9}$$

$$d_k^{(j-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(c_{2k}^{(j)} - c_{2k+1}^{(j)}\right) \tag{10}$$

によって決められる。この式は分解アルゴリズムと呼ばれる。係数 $1/\sqrt{2}$ は変換を正規化するためのものである。(8) を再帰的に繰り返すと, f_j は

$$f_j(x) = f_0(x) + g_0(x) + \cdots + g_{j-1}(x) \tag{11}$$

と書けることになる。また, 逆に, f_{j-1}, g_{j-1} が与えられていれば, f_j を決定でき, そのときの係数（再構成アルゴリズム）を求めることができる。分解操作 (11) による係数の変換をベクトル間の変換として

$$d = Wc \tag{12}$$

と表記する。変換行列 W は直交行列になる。

3.2　Haar wavelet 変換による前処理

S を A の wavelet 変換行列 WAW^T の対角部分行列とする。ここでは, 前処理行列として

$$M^{-1} = W^TS^{-1}W \tag{13}$$

を使用する。

変換行列 WAW^T の対角成分を計算する手順は次のようになる。まず, 行列全体を 2×2 の小区間に区切り, 一段階の変換によって得られる左上 1/4 部分行列の成分 $c_{kj}^{(j-1)}$ と右下 1/4 部分行列の対角成分 $d_{kk}^{(j-1)}$ とを

$$c_{kl}^{(j-1)} = \frac{1}{2}\left(c_{2k,2l}^{(j)} + c_{2k,2l+1}^{(j)} + c_{2k+1,2l}^{(j)} + c_{2k+1,2l+1}^{(j)}\right) \tag{14}$$

$$d_{kk}^{(j-1)} = \frac{1}{2}\left(c_{2k,2k}^{(j)} - c_{2k,2k+1}^{(j)} - c_{2k+1,2k}^{(j)} + c_{2k+1,2k+1}^{(j)}\right) \tag{15}$$

により計算する。これを再帰的に繰り返せばすべての対角成分が得られる。

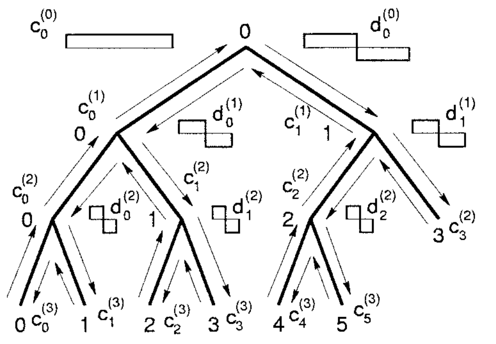

図 1 2分木上の Haar wavelet 基底となぞり

4 高速多重極境界要素法への応用

この方法を高速多重極境界要素法へ適用させるには，$d_{kk}^{(j-1)}$ の計算に必要な $c_{kl}^{(j)}$ を，できるだけ行列の成分を使わずに計算させることが必要になる。そこで，先に示した Haar wavelet 変換を 2 分木上で行ない (図 1)，係数の部分行列の成分の総和は多重極表現を使って計算することで，この問題を解決する。2 分木上の wavelet は要素数が 2^n でなくても適用できる。4 分木上の wavelet 変換は，4 分木の 1 段を 2 段の 2 分木で表すことにより実現する。同様に，3 次元問題の場合には 8 分木上の Haar wavelet 変換を利用することが可能である。

以下では，非正規な分解アルゴリズム

$$c_k^{(j-1)} = c_{2k}^{(j)} + c_{2k+1}^{(j)}, \quad d_k^{(j-1)} = c_{2k}^{(j)} - c_{2k+1}^{(j)} \tag{16}$$

を導入する。これによる変換行列を $\tilde{W}$ と表す。

4.1 $\tilde{W}A\tilde{W}^T$ の対角成分の計算

(14) の 2×2 小行列の成分 $c_{kl}^{(j)}$ は，変換 $\tilde{W}$ を用いる場合には，4 分木の上で，セル l に含まれる全要素からセル k に含まれる全選点への影響の総和であると考えられる (これを相互作用係数と呼ぶ)。各セルについて，それに隣接するセルからの相互作用係数を計算し，これを使って親セルの相互作用係数を計算すれば，つねに (15) を計算できる。ただし，親セルと子セルの遠方に違いがあるので，これを多重極展開を使って計算すれば，(14) の計算も大幅に省略できる。今，親セル X と隣接セル Y との相互作用係数は，子セル i の近傍セルの集合 (i を含む) を Ω_i とすると

$$c_Y(X) = \sum_{i \in X} \left\{ \sum_{j \in Y \cap \Omega_i} c_j(i) + \sum_{k \in Y - \Omega_i} \left[L_0(k)M_0(i) + \sum_{n \geq 1} nL_n(k)M_n(i) \right] \right\} \tag{17}$$

によって計算できる。

4.2 WAW^T の対角成分の計算

W は $\tilde{W}$ に正規化のためにスケーリングを施したものであるから，その関係は

$$W = S_1 \tilde{W} S_2 \tag{18}$$

のように表すことができる。ここに，S_1 と S_2 は左右からのスケーリングのための対角行列である。S_1 の成分は節の深さに依存する正規化のための係数であり，該当する wavelet 基底の 2 分木上のレベルを n，最大レベルを n_{max} とすると，$1/\sqrt{2}^{n_{max}-n}$ で与えられる。また，S_2 の成分は葉の 2 分木上のレベルの最大レベルからの高さによる換算係数であって，対応する要素のレベルを n とするとき，$\sqrt{2}^{n_{max}-n}$ である。これらは，いずれも W^T の計算と同様の手続きによって求めることができる。よって，

$$WAW^T = S_1 \tilde{W} S_2 A S_2 \tilde{W}^T S_1 \tag{19}$$

と表せる。つまり，S_2 の成分によって与えられる重みを持った行列 S_2AS_2 について，さきの方法で $\tilde{W}S_2AS_2\tilde{W}^T$ の対角成分を計算し，結果を S_1 によってスケーリングすれば，WAW^T の対角成分を計算できる。

5 数値解析例

図 2 に数値解析の一例を示す。反復法は GPBi-CG を使用し，正方形領域の Dirichlet 問題を解いた。図は，要素数と収束までの反復回数との関係を示したている。前処理を行なわない場合の反復数は $\sqrt{N}$ に比例するが，前処理を行なった場合には，$N^{1/4}$ に比例する程度となっており，ここで提案する前処理法が効果的であることが示されている。

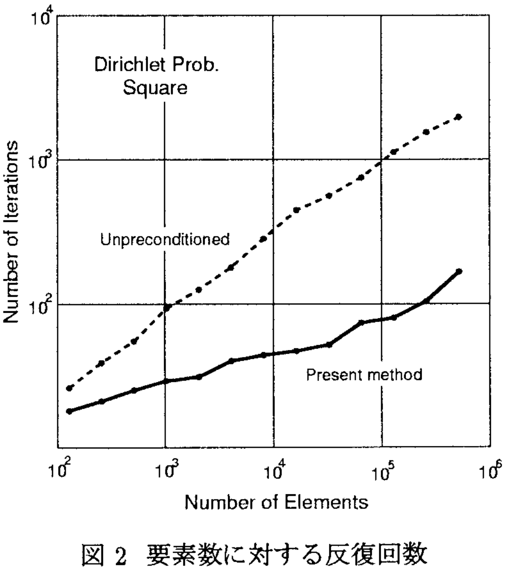

図 2 要素数に対する反復回数

今後の発展として，wavelet 変換行列の対角ブロック行列を利用した収束性の改善，いろいろな問題 (3 次元問題，Helmholtz 方程式) への拡張を検討しており，現在，研究を進めているところである。

参考文献

[1] 福井卓雄: Wavelet 変換を用いた境界要素反復解法における前処理, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, **9**, pp. 85–90, 1999.

[2] 福井卓雄: 大規模波動問題における境界要素反復解析の前処理法について, 計算工学講演会論文集, **6**, pp. 607–610, 2001.