高い波数を考慮した波動問題の3次元高速多重極境界要素法

福井大学大学院　学生会員　○　近藤 喜彦
福井大学工学部　正会員　　　福井 卓雄

波動問題は境界要素法が有効に適用できる問題である。実用的な解析を行うためには自由度の大きい問題を扱えなくてはならない。これまで我々は2次元波動問題において高速多重極法を利用して境界要素法を効率化する手法を提案してきた。とくに, 波数の大きな問題においては, 繰り込み型の係数変換を利用する高速多重極法では計算量が膨大になるので, 積形式を利用した高速多重極法を提案してきた [2, 1]。ここでは, 3次元波動問題を解析対象とし, 2次元問題に適用した解析手法を3次元に拡張することを試みる。

1　3次元散乱問題の高速多重極境界要素法

3次元波動散乱問題を考える。散乱体の外部領域を B, 境界を ∂B とする。波動場 u に関する境界値問題は

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad \text{in } B, \qquad u = \hat{u} \quad \text{on } \partial B_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \hat{s} \quad \text{on } \partial B_2 \tag{1}$$

である。ここに, ∇^2 は Laplace 作要素, k は波数, $\partial/\partial n$ は外向き法線微分を示す。入射波を $\tilde{u}$ とすると, この問題の解 u は一般化された Green 公式

$$u(\boldsymbol{x}) = \tilde{u}(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial B} G(\boldsymbol{x}, \hat{y}) \frac{\partial u}{\partial n}(\hat{y})\, dS_y - \int_{\partial B} S(\boldsymbol{x}, \hat{y}) u(\hat{y})\, dS_y \tag{2}$$

により与えられる。Helmholtz 方程式の第1基本特異解と第2基本特異解は次のように与えられる。

$$G(\boldsymbol{x}, \hat{y}) = \frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\hat{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\hat{y}|}, \qquad S(\boldsymbol{x}, \hat{y}) = \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \hat{y})}{\partial n_y} \tag{3}$$

3次元波動問題における高速多重極法の基礎式は Epton と Dembert [3] により与えられている。

多重極展開および局所展開を

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{ik}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} M_n^m h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(\theta, \phi), \qquad u(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} L_n^m j_n(kr) Y_n^{-m}(\theta, \phi) \tag{4}$$

と表す。ここに, j_n と $h_n^{(1)}$ はそれぞれ第1種および第3種の球 Bessel 関数であり, Y_n^m は球面調和関数で

$$Y_n^m = \sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} (-1)^m P_n^{|m|}(cos\theta) e^{im\phi} \tag{5}$$

で定義する。P_n^m は Legendre の陪関数である。第1基本特異解の展開形は

$$G(\boldsymbol{x}, \hat{y}) = \frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\hat{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\hat{y}|} = \frac{i}{4\pi} h_0^{(1)}(k|\boldsymbol{x}-\hat{y}|) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{(2n+1)ik}{4\pi} j_n(k\rho) Y_n^{-m}(\alpha, \beta) h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(\theta, \phi) \tag{6}$$

と書けるので, 基本特異解の多重極モーメントは $(2n+1) j_n(k\rho) Y_n^{-m}(\alpha, \beta)$ である ((ρ, α, β) は $\hat{y}$ の極座標)。

多重極展開および局所展開間の変換関係を示すために, $Q_n^m(\boldsymbol{x}) = h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(\theta, \phi)$ および $I_n^m(\boldsymbol{x}) = j_n(kr) Y_n^m(\theta, \phi)$ を導入する。これらを用いれば, 変換関係式 M2M, M2L, L2L は

$$\tilde{M}_n^m = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=-l}^{l} \frac{(2n+1)(2n'+1)}{4\pi} i^{n+n'-l} E \begin{pmatrix} -m & m' & j \\ n & n' & l \end{pmatrix} I_{n'}^{-m'}(\boldsymbol{a}) M_l^j \tag{7}$$

$$L_n^m = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=-l}^{l} (-1)^{n+m} \frac{(2n+1)(2n'+1)}{4\pi} i^{n+n'-l} E \begin{pmatrix} -m & -m' & j \\ n & n' & l \end{pmatrix} O_{n'}^{m'}(-\boldsymbol{a}) M_l^j \tag{8}$$

$$\tilde{L}_n^m = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=-j}^{j} \frac{(2n+1)(2n'+1)}{4\pi} i^{n+n'-l} E \begin{pmatrix} -m & m' & j \\ n & n' & l \end{pmatrix} I_{n'}^{-m'}(\boldsymbol{a}) L_l^j \tag{9}$$

となる。ここに, a は新しい原点から見た古い原点の位置ベクトル (負の移動ベクトル) である。また, $E()$ は球面調和関数の単位球面上における積分であり,

$$E\begin{pmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{pmatrix} = \int_0^\pi \int 0^{2\pi} Y_l^i(\theta,\phi) Y_m^j(\theta,\phi) Y_n^k(\theta,\phi) \sin\theta \, d\theta \, d\phi \tag{10}$$

で定義される。

2 積形式による変換

実際の計算においては, 多重極展開および局所展開 (4) は有限項で打ち切ったものを使う。必要な項数 p は波数に依存し, 波数が大きい場合には, より多くの項数を必要とする。一方, 変換公式 (7)–(9) は一種の繰り込み型の変換である。したがって, 波数の大きな問題においては展開係数の変換に多大な時間がかかってしまう。これを解決する方法として, 積形式による変換を導入する。

単位球面上の点を $\hat{\boldsymbol{x}} = (\theta, \phi)$ とする。多重極モーメント M_n^m に対する単位球面上の関数 $M(\hat{\boldsymbol{x}})$ を変換および逆変換

$$M(\hat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{1}{i^{n+1}} M_n^m Y_n^m(\theta,\phi), \qquad M_n^m = \frac{2n+1}{4\pi} i^{n+1} \int_{S_1} Y_n^{-m}(\theta,\phi) M(\hat{\boldsymbol{x}}) \, d\Omega \tag{11}$$

により定義する。局所展開係数 L_n^m についても同様にして, $L(\hat{\boldsymbol{x}})$ を定義する。ここに, S_1 は単位球面, $d\Omega$ は単位球面上の面素である。さらに, 関数 $j(\hat{\boldsymbol{x}})$ および $h(\hat{\boldsymbol{x}})$ を

$$j(\hat{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d}) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n j_n(k|\boldsymbol{d}|) P_n(\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{d}) = e^{ik\boldsymbol{d}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}}, \qquad h(\hat{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d}) = \sum_{n=0}^{P} (2n+1) i^n h_n^{(1)}(k|\boldsymbol{d}|) P_n(\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{d}) \tag{12}$$

とする。ここに, $\boldsymbol{d}$ は展開点の移動ベクトルである。これらの関数を用いれば, 変換関係 (7)–(9) は

$$\tilde{M}(\hat{\boldsymbol{x}}) = M(\hat{\boldsymbol{x}}) j(\hat{\boldsymbol{x}}; -\boldsymbol{a}) \tag{13}$$

$$L(\hat{\boldsymbol{x}}) = M(\hat{\boldsymbol{x}}) h(\hat{\boldsymbol{x}}; \boldsymbol{a}) \tag{14}$$

$$\tilde{L}(\hat{\boldsymbol{x}}) = L(\hat{\boldsymbol{x}}) j(\hat{\boldsymbol{x}}; -\boldsymbol{a}) \tag{15}$$

となる。この形式では変換はサンプル点の数だけの計算で済むので, 変換 (7)–(9) を高速に実行することが出来る。

2次元問題の場合 [1] と同様のアルゴリズムを考えよう。M2M の計算の手順は

1. $\{M_n^m\} \Rightarrow M(\hat{\boldsymbol{x}})$ を $(11)_1$ により計算する。
2. 変換 (13) を実行し, $\tilde{M}(\hat{\boldsymbol{x}})$ を求める。
3. $\tilde{M}(\hat{\boldsymbol{x}}) \Rightarrow \{\tilde{M}_n^m\}$ を $(11)_2$ により計算する。

となる。M2L, L2L についても同様である。

上の計算を効率的に実行するためには, 手順 1 および 3, すなわち, 多重極モーメント (局所展開係数) と単位球面上の関数との間の変換 (11) を高速に行う必要がある。このために, Driscoll と Healy[4] によって提案された球面上の FFT アルゴリズムを利用する。このアルゴリズムによれば, 変換 (11) を $O(N \log^2 N)$ (N は球面上のサンプル点の数) で実行することが可能であり, 繰り込み型の変換 (7)–(9) の場合の計算量 $O(p^4)$ に対して $O(p^2 \log^2 p^2)$ 程度の計算量で変換を実行できることになる。

現在, 上記の方針に基づいたプログラムを開発中である。計算法の詳細および結果については当日に報告する。

参考文献

[1] 福井卓雄, 勝本順三 : 高速 Fourier 変換を援用した高速多重極境界要素法による 2 次元散乱問題の解析, 境界要素法論文集, **15**, pp.99–104, 1998.

[2] 福井卓雄, 勝本順三, 稲津恭介: 波数の大きな波動問題の高速多重極境界要素法による解析, 境界要素法論文集, **9**, pp.79–85, 1999.

[3] Epton, M.A. and B. Dembart : Multipole translation theory for the three-dimensional Laplace and Helmholtz equations, *SIAM J. Sci. Comput.*, **16**, pp.865–897, 1995.

[4] Driscoll, J.R. and D. Healy.: Computing Fourier transformations and convolutions on the 2-sphere, *Adv. in Appl. Math.*, **15**, pp.202–250, 1993.