

大同工業大学大学院 学生員 ○木村健一
大同工業大学 都市環境デザイン学科 正員 水澤富作

1. まえがき

美しい曲線を描く曲線橋はリブにより補強された扇形平板が多く使用されている。このような平板構造物は、構造異方性として扱う必要があり、その振動特性を知ることは設計上重要な課題である。また、構造物の軽量化や最適化のために、変断面性状を持つ板要素が多く用いられている。これまでに Kim¹⁾は、薄板理論に基づく Ritz 法を用いて極直交異方性扇形板の振動解析を行っている。竹下²⁾は極異方性板理論を用い、曲線橋の曲げ解析をしている。しかしながら、板厚が増大すると、横せん断変形や回転慣性の影響を考慮する必要がある、極直交異方性を有する変厚扇形厚板の振動解析の研究は、あまり報告されていない。

本文では、*spline* 要素法を用いて、図-1 に示す極異方性変厚扇形板の振動解析を行い、解の収束性と精度比較を示し、また振動数に与える異方性パラメータ、幅厚比や半径比の影響についても検討を行っている。

2. 式の定式化 Mindlin 板理論とポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて、図-1 に示すような変厚を有した *spline* 要素モデルを導く。式の定式化にあたり、次式で表される無次元座標系を用いる。

$$\xi = \theta/\phi, \eta = (r - R_i)/B, W' = W/B \quad \dots (1)$$

ここで、 W はたわみであり、 $B = R_i(\lambda - 1)$ は板幅、 $\lambda = R_o/R_i$ は半径比、 ϕ は中心角、 r は半径であり、また R_i と R_o は、それぞれ扇形板の内径と外径を示す。横せん断変形と回転慣性の影響を考慮した Mindlin 板理論では、それぞれ独立した次式の変位関数が要素内で仮定される。

$$\phi_\theta = \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta), \phi_r = \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta), W' = \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \quad \dots (2)$$

ここで、 A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} はそれぞれ未定係数であり、 $N_{m,k}(\xi)$ と $N_{n,k}(\eta)$ は、正規化された *spline* 関数である。

扇形板の板厚は、それぞれ半径方向および円周方向に直線的に変化すると仮定すれば、次式で与えられる。

$$h(\xi) = h_{00} H(\xi) T(\eta), H(\xi) = (\delta_\theta - 1)\xi + 1, T(\eta) = (\delta_r - 1)\eta + 1 \quad \dots (3)$$

ここで、 δ_θ と δ_r は変厚比であり、それぞれ $h_\theta^1/h_{00}, h_r^1/h_{00}$ で定義する。

極異方性変厚扇形 Mindlin 板のひずみエネルギー、 U と運動エネルギー、 T は、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} U = & (D_\theta^{00} \phi/2) \int_0^\phi \int_{R_i}^{R_o} \left\{ (1/\phi) A (\partial \phi_\theta / \partial \xi)^2 + (\phi_r/A)^2 + (E_r/E_\theta) (\partial \phi_r / \partial \eta)^2 + 2\nu_\theta \{ (1/\phi) A (\partial \phi_\theta / \partial \xi) + (\phi_r/A) \} (\partial \phi_r / \partial \eta) \right. \\ & \left. + (1 - \nu_{r\theta} \nu_\theta) (G_{r\theta}/E_\theta) \{ (\partial \phi_\theta / \partial \eta) + (1/\phi) A (\partial \phi_r / \partial \xi) - (\partial \phi_\theta / \partial \eta) \}^2 \right\} A d\xi d\eta \\ & + \kappa (B/h_{00})^2 [S_{\theta z} \{ (1/\phi) A (\partial W' / \partial \xi) + \phi_\theta \}^2 + S_{rz} \{ (\partial W' / \partial \eta) + \phi_r \}^2] A d\xi d\eta \\ T = & (\rho h_{00}/2) \omega^2 \phi B^4 \int_0^\phi \int_{R_i}^{R_o} \{ h(\xi, \eta) W'^2 + (1/12) (h_{00}/B)^2 h(\xi, \eta)^3 (\phi_\theta^2 + \phi_r^2) \} A d\xi d\eta \quad \dots (4) \end{aligned}$$

ここで、 $D_\theta^{00} = E_\theta h_{00}^3 / 12(1 - \nu_{r\theta} \nu_\theta)$, $S_{\theta z} = 12(1 - \nu_{r\theta} \nu_\theta) G_{\theta z} / E_\theta$, $S_{rz} = 12(1 - \nu_{r\theta} \nu_\theta) G_{rz} / E_\theta$, E_r, E_θ はヤング係数、 $G_{\theta z}, G_{rz}$ はせん断弾性係数、 $\nu_{r\theta}, \nu_\theta$ はポアソン比、 κ はせん断修正係数、 ρ は密度、 ω は円振動数 (rad/sec) であり、 $A = \{ \eta + 1/(\lambda - 1) \}$ である。

変厚扇形 Mindlin 板の全ポテンシャルエネルギー、 Π は次式で示される。

$$\Pi = U - T \quad \dots (5)$$

したがって、式(5)の Π を極値化すれば、次式の固有方程式が得られる。

$$\partial \Pi / \partial \{ \Delta \}_{rs} = \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} \sum_{r=1}^{i_\theta} \sum_{s=1}^{i_r} ([K]_{mnrs} \{ \Delta \}_{mn} - n^*{}^2 [M]_{mnrs} \{ \Delta \}_{mn}) = 0 \quad \dots (6)$$

ここで、 $[K]_{mnrs}$ と $[M]_{mnrs}$ はそれぞれ剛性マトリックスと質量マトリックス、 $\{ \Delta \}_{mn}$ は一般化座標パラメータ

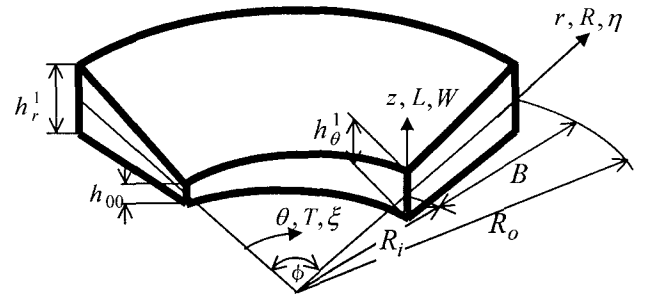


図-1 極異方性変厚扇形板と極座標系

であり、 n^* は振動数パラメータである。

3. 数値計算例および考察

数値計算例では、せん断修正係数 κ は5/6に仮定し、表-1に示す材料特性値は、表-2、図-2、3で用いた。

3.1 本手法の収束性と精度比較

表-2は、周辺固定された極異方性扇形Mindlin板の振動数パラメータ、 $n^* = \alpha B^2 \sqrt{\rho h_{00}/D_\theta^{00}}$ の収束性に与える要素分割数の影響を等厚と2方向変厚に分けて示す。ここで、幅厚比 $B/h_{00}=10$ 、半径比 $R_0/R_i=2.0$ 、中心角 $\phi=45^\circ$ とし、要素分割数 $M_r=M_\theta$ は12,16,20分割に変化させている。これより、要素分割数の増大に伴い、 n^* は一定値への安定した収束状態を示している。以後の計算例では、要素分割数 $M_r=M_\theta=20$ を用いている。

表-3は、周辺単純支持された極異方性扇形Mindlin板の振動数パラメータ、 n^* の精度比較を示す。ここで、半径比 $R_0/R_i=20$ 、幅厚比 $B/h_{00}=100$ 、中心角 $\phi=100^\circ$ とし、比較のためにKimら¹⁾の薄板理論に基づく解も示してある。これより、本手法による解は、Kimら¹⁾の結果と良く一致している。

3.2 n^* に与える異方性パラメータ、 E_R/E_T の影響

以下の計算例では、半径方向に変厚な場合の変厚比を $h_r^1/h_{00}=2.0$ 、 $h_\theta^1/h_{00}=1.0$ とし、円周方向に変厚になる場合には、 $h_r^1/h_{00}=1.0$ 、 $h_\theta^1/h_{00}=2.0$ とする。

図-2は、周辺固定された極異方性扇形Mindlin板の基本振動数パラメータ、 n_1^* に与える異方性パラメータ、 E_R/E_T と B/h_{00} の影響を示す。ここで、 $R_0/R_i=2.0$ 、 $\phi=45^\circ$ とし、 E_R/E_T を10,20,30、 B/h_{00} を10から40まで変化させた。これより、 B/h_{00} を増大すると n_1^* に与える E_R/E_T の影響が大きくなり、その影響は半径方向に変厚にした場合に顕著に現れる。

図-3は、周辺固定された極異方性扇形Mindlin板の n_1^* に与える E_R/E_T と R_0/R_i の影響を示す。ここで、 $B/h_{00}=30$ 、 $\phi=45^\circ$ とし、 E_R/E_T を10,20,30、 R_0/R_i を1.25から2.5まで変化させている。これより、円周方向変厚板の n_1^* に与える E_R/E_T の影響は、 R_0/R_i の増大とともに大きく現れるが、半径方向に変厚な板の n_1^* は R_0/R_i の変化に対して、さほど大きな変動が見られない。

4. まとめ 1)本手法を用いれば、極異方性扇形Mindlin板の安定した収束性と精度が得られる。2)扇形板の n_1^* に与える E_R/E_T の影響は、 B/h_{00} が大きいと顕著に見られ、また、 R_0/R_i を変化させると、円周方向に変厚にした場合に、 E_R/E_T の影響が大きく生じてくる。

参考文献 1)Kim et. al.: J. Sound and Vibr. Vol. 134, 1989. 2)竹下淳:土木技術,1961 3)中戸他:新編木材工学,1985.

表-1 シトカスブルースの材料特性値³⁾

ヤング係数(10^3 kgf/cm^2)		せん断弾性率(10^3 kgf/cm^2)			ポアソン比
E_T	E_R	G_{RT}	G_{LT}	G_{LR}	ν_{RT}
5.1	9.2	0.34	7.3	7.7	0.43

表-2 周辺固定の極異方性変厚扇形Mindlin板の振動数パラメータ n^* の収束性に与える要素分割数の影響: $B/h_{00}=10, R_0/R_i=2.0, \phi=45^\circ$

変厚タイプ	$M_r=M_\theta$	modes				
		1st	2nd	3rd	4th	
2方向変厚	12	66.43	104.2	135.1	158.9	
	16	66.44	104.3	135.1	158.9	
	20	66.44	104.3	135.1	158.9	
$h_r^1/h_{00}=h_\theta^1/h_{00}=2.0$	12	34.52	54.96	79.80	87.18	
	16	34.52	54.96	79.80	87.16	
	20	34.52	54.96	79.80	87.16	

表-3 周辺単純支持の等厚極異方性扇形板の n^* の精度比較: $B/h_{00}=100, R_0/R_i=20, \nu_{TK}=0.3, \phi=100^\circ$

D_R/D_T	D_{RT}/D_T	比較	modes			
			1st	2nd	3rd	4th
10	3.5	SEM	19.91	35.12	54.00	60.52
		Kim ¹⁾	20.14	35.50	54.60	61.52
1.0	0.35	SEM	23.08	49.39	65.34	83.49
		Kim ¹⁾	23.23	49.79	66.21	84.65
0.1	0.485	SEM	55.96	128.7	135.6	220.1
		Kim ¹⁾	56.28	129.9	136.6	224.4

SEM は spline 要素法

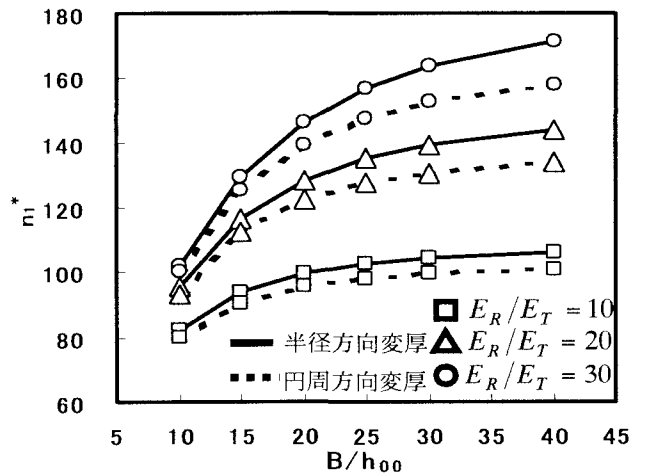


図-2 極異方性扇形Mindlin板の n_1^* に与える E_R/E_T と B/h_{00} の影響: $R_0/R_i=2.0, \phi=45^\circ, CC-CC$

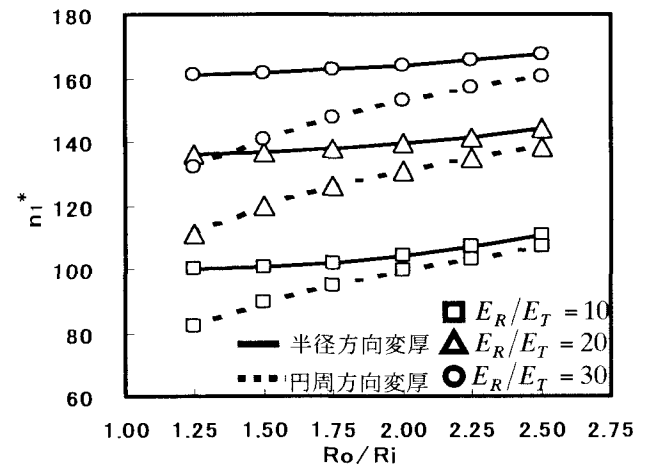


図-3 極異方性扇形Mindlin板の n_1^* に与える E_R/E_T と R_0/R_i の影響: $B/h_{00}=30, \phi=45^\circ, CC-CC$