

Spline Prism Method を用いた直交異方性厚板の振動解析

大同工業大学 学生員 ○名木野晴暢

大同工業大学 都市環境デザイン学科 正員 水澤富作

1. まえがき 異方性の大きな板や厚板の振動解析では、横せん断変形や回転慣性の影響等が無視できなくなるので、これらの影響を考慮した *Mindlin* の板理論や *Reddy* の板理論等が用いられている¹⁾。また、異方性の大きな厚板では、厚さ方向のひずみ成分も無視できなくなると思われる。これまでに、等方性厚板を対象にした3次元弾性理論の適用に関する研究は比較的多く報告されているが、3次元弾性理論に基づく異方性厚板の研究はさほど多く報告されていない。最近、近藤らは²⁾、*Mindlin* 板理論を用いて、異方性の大きな木板の振動解析を行い、木板の振動特性を明らかにしているが、厚さ方向の影響は無視されている。

本研究では、直交異方性弾性理論に基づく *Spline Prism* 法を用いて、直交異方性厚板の振動解析を行い、本手法の収束性や解の精度比較について検討を行っている。また、木板の振動特性に与える板厚比と厚さ方向の弾性係数の変動影響や *Mindlin* 板理論による結果との相違などについて明らかにしている。

2. 解析手法 直交異方性弾性理論とポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて、図・1に示す *spline* プリズム要素モデルを導く。式の定式化にあたり、次式で表される無次元直交座標系を用いる。

$\xi = x/a, \eta = y/b, \zeta = z/l \cdots (1)$ ここで、 a, b, l はそれぞれ厚板の幅、厚さと長さである。プリズム要素内で仮定される x, y, z 方向の変位関数 U, V, W は、それぞれ次式で表される。

$$U = \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} A_{mn} \cdot N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\eta) \cdot Z_l(\zeta), \quad V = \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} B_{mn} \cdot N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\eta) \cdot Z_l(\zeta)$$

$$W = \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} C_{mn} \cdot N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\eta) \cdot \bar{Z}_l(\zeta) \quad \cdots (2)$$

ここで、 $N_{m,k}(\xi), N_{n,k}(\eta)$ は正規化された *B-spline* であり、 A_{mn} などは未定係数である。 ζ 軸に垂直な相対する2面が単純支持と仮定すれば、固有関数は次式で表すことができる。

$$Z_l(\zeta) = \sin(l\pi\zeta), \bar{Z}_l(\zeta) = \cos(l\pi\zeta) \quad (l=1,2,\dots,r) \quad \cdots (3)$$

また、直交異方性弾性体の構成式は次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = E_x \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad \cdots (4)$$

ここで、 D_{ij} は次式で与えられる。

$$D_{11} = E_x(1 - \nu_{zy}\nu_{yz})/E_x S, \quad D_{12} = D_{21} = E_x(\nu_{yx} + \nu_{zx}\nu_{yz})/E_x S, \quad D_{22} = E_y(1 - \nu_{zx}\nu_{xz})/E_x S,$$

$$D_{13} = D_{31} = E_x(\nu_{zx} + \nu_{yx}\nu_{zy})/E_x S, \quad D_{23} = D_{32} = E_y(\nu_{zy} + \nu_{zx}\nu_{xy})/E_x S, \quad D_{33} = E_z(1 - \nu_{yx}\nu_{xy})/E_x S,$$

$$D_{44} = G_{xy}/E_x, \quad D_{55} = G_{yz}/E_x, \quad D_{66} = G_{zx}/E_x \quad \cdots (5)$$

ただし、 E_i はヤング係数、 ν_{ij} はポアソン比、 $S = 1 - \nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx} - \nu_{xz}\nu_{yx}\nu_{zy} - \nu_{zx}\nu_{zy}\nu_{xy} - \nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx}$ である。また、直交異方性体においては次式の相反定理が成り立つ。

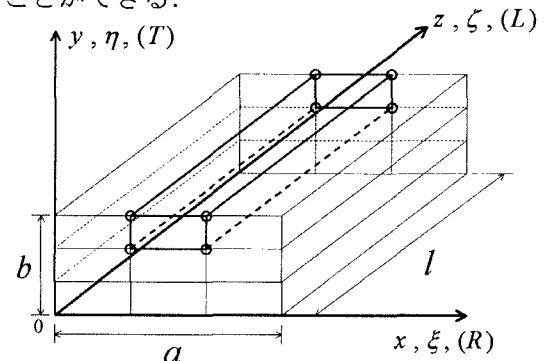
$$\nu_{xy}/E_x = \nu_{yx}/E_y, \quad \nu_{yz}/E_y = \nu_{zy}/E_z, \quad \nu_{zx}/E_z = \nu_{xz}/E_x \quad \cdots (6)$$

$$\text{厚板の全ポテンシャルエネルギー、}\Pi\text{は次式で与えられる。}\Pi = U_p - T \quad \cdots (7)$$

ここで、 U_p は厚板のひずみエネルギー、 T は運動エネルギーである。

したがって、ポテンシャルエネルギー最小の原理と固有関数の直交性を用いれば、次式の固有方程式が得られるので、各級数ごとに固有値計算が行える。ここで、 $\omega[\text{rad/sec}]$ は円振動数である。

$$\sum_{l=1}^r \left([K]_{mnl} \{\Delta\}_l - \omega^2 [M]_{mnl} \{\Delta\}_l \right) = 0 \quad ; \quad l=1,2,\dots,r \quad \cdots (8)$$



図・1 直交異方性厚板と座標系

3. 数値計算例及び考察 表-2 には、表-1 に示す物性値を持つスプルス柂目板の振動数パラメータ n^* に与える、*spline* 次数 $k-1$ とプリズム要素の分割数 $M_x = M_y$

の影響が示している。また、比較のために *Mindlin* 板理論 (*MPT*) による結果も示してある²⁾。ここで、振動数パラメータを $n^* = \omega l^2 \sqrt{\rho b / D_x}$ で表し、 $D_x = E_x b^3 / 12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$ は板の曲げ剛性である。これより、プリズム要素の分割数を増大すると、一定値への安定した収束性が示され、また *spline* 次数を高めれば少ない分割数で安定した収束値が得られている。

MPT の値は、本手法の結果と比較して、よく一致しているが、やや大きな値を示している。これは、*Mindlin* 板理論で仮定するせん断修正係数が異方性の影響を無視して、一定値で扱っているためだと考えられる。10 次の振動数パラメータ n^* には、*Mindlin* 板理論では表せない厚さ方向の変形モードが生じてくる。

表-3 には、3 次元弾性理論 (*SPM*) と *Mindlin* 板理論 (*MPT*) で求めたスプルス柂目板の振動数パラメータ n^* が示してある。ここで、他の相対する 2 面は固定とし、 b/a は 0.05 から 0.4 まで変化させている。これより、板厚比の増大に伴い *Mindlin* 板理論では表せない厚さ方向のモード形状が高次の振動数パラメータに現れてくる。また、両理論で求めた値を比較すると、板厚が薄いほど両者の差が大きく見られるが、これは *Mindlin* 板理論で必要となるせん断修正係数に異方性を無視して、一定値 $\kappa = \pi^2 / 12$ で仮定しているためと考えられる。従って、比較的高次の振動数が必要になる動的問題には、3 次元弾性理論を適用する必要があると思われる。

木材は含水率等の影響により材料特性値が変動することが知られている²⁾。図-2 は、スプルス柂目板の基本振動数パラメータ $\bar{n}_{1st}^*$ に与える厚さ方向のヤング係数 E_T (E_y) の変動影響を示している。ここで、 E_T を前後 50% 変動させ、板厚比は 0.1 から 0.4 まで変化させている。ただし、 E_T の変動により相反定理からポアソン比も変化するので、基本振動数パラメータは $\bar{n}_{1st}^* = \omega l^2 \sqrt{\rho / b^2 E_x}$ で表している。これにより、 E_T の変動の影響は、板厚が薄いほど大きく見られ、 E_T の増大とともに $\bar{n}_{1st}^*$ は線形的に増加することがわかる。

4. まとめ 本研究で得られた結果をまとめれば以下の通りである。1) *Spline Prism* 法を用いれば安定した収束性が得られ、*spline* 次数を高めれば、少ない分割数で安定した収束値が得られる。2) 本手法の結果は、せん断修正係数を用いる *Mindlin* 板理論による振動数パラメータ n^* の値より小さな値を示す。また、板厚が増大すると、高次の振動数に厚さ方向の変形モードが現れる。3) 基本振動数パラメータ $\bar{n}_{1st}^*$ に与える厚さ方向の弾性係数の影響は、板厚比が小さいほど大きく現れる。

参考文献 1). 水澤他：構造工学論文集，Vol.39A，pp1~12，1993。 2). 近藤他：応用力学論文集，Vol.4，pp1~12，2001。 3). 中戸他：新編木材工学，養賢堂，1985。

表-1 シトカスプルスの材料特性値³⁾

ヤング係数 [$\times 10^3 \text{kgf/cm}^2$]			せん断弾性係数 [$\times 10^3 \text{kgf/cm}^2$]			ポアソン比		
E_R	E_T	E_L	G_{RT}	G_{LT}	G_{LR}	ν_{RT}	ν_{LT}	ν_{LR}
9.2	5.1	118.0	0.34	7.30	7.70	0.43	0.47	0.37

表-2 スプルス柂目厚板の振動数パラメータ， n^* に与える *spline* 次数と要素分割数の影響と精度比較：SS-FF, $b/a=0.2, L/a=1.0$

k-1	Mx=My	modes			
		1st	2nd	9th	10th
		(1,1)	(2,1)	(3,2)	-
2	2	9.169	12.66	42.69	44.20
	10	9.027	12.44	39.45	41.90
	18	9.026	12.44	39.41	41.89
3	2	9.092	12.55	40.21	42.23
	10	9.026	12.44	39.40	41.89
4	6	9.026	12.44	39.41	41.89
	MPT ²⁾	(1,1)	(2,1)	(3,2)	*
		9.109	12.90	41.00	*

(m,n) はそれぞれ x, z 方向のモード次数を示し、* は *Mindlin* 板理論では表せない振動数であり、また、- は厚さ方向のモードを示す。

表-3 スプルス柂目厚板の振動数パラメータ， n^* に与える板厚比の影響：SS-CC, $k-1=3, M_x=M_y=12, L/a=1.0$

b/a	Method	modes				
		1st	2nd	7th	8th	9th
0.05		(1,1)	(2,1)	(2,3)	(3,2)	(1,4)
	SPM	35.71	68.25	132.6	141.6	150.8
	MPT	37.39	71.33	136.7	147.4	152.8
0.1		(1,1)	(1,2)	(2,3)	(1,5)	(3,1)
	SPM	28.27	45.32	90.71	104.9	105.3
	MPT	29.37	46.37	92.99	104.2	108.7
0.2		(1,1)	(1,2)	(1,5)	(2,3)	-
	SPM	22.30	30.13	58.61	63.56	67.89
	MPT	22.93	30.63	57.77	64.68	*
0.3		(1,1)	(1,2)	(2,2)	-	(1,6)
	SPM	18.97	23.74	43.94	45.24	47.14
	MPT	19.24	23.85	44.27	*	45.42
0.4		(1,1)	(1,2)	-	(1,6)	(2,2)
	SPM	16.40	19.63	33.87	36.03	36.20
	MPT	16.61	19.74	*	34.88	36.56

(m,n) はそれぞれ x, z 方向のモード次数を示し、* は *Mindlin* 板理論では表せない振動数であり、また、- は厚さ方向のモードを示す。

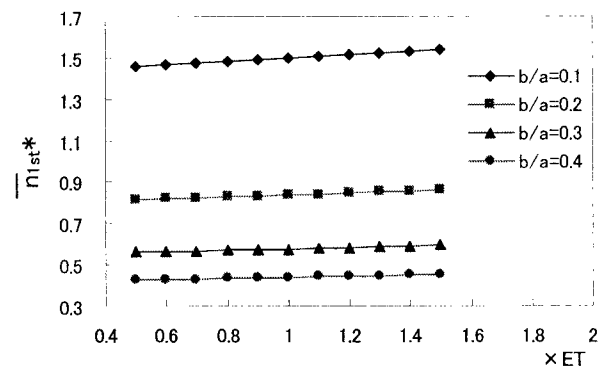


図-2 スプルス柂目厚板における振動数パラメータ， $\bar{n}_{1st}^*$ 与える E_T の変動の影響：SS-FF, $L/a=1.0$