マス-バネ系モデルを用いた伝達境界の定式化

名古屋大学　学生員　李　相勲
名古屋大学　フェロー　田辺　忠顕

1. はじめに

半無限に連続する連続高架橋の振動解析においては，解析対象の構造物の一部のみを取り出し，その両端を自由境界として取り扱っている場合が一般的であるが，実際には隣接する構造物との間の相互作用が必然的に生じると考えられる．それを考慮するにはエネルギー伝達境界が最適な方法として挙げられる．そこで，本研究ではその第一歩として連続した1自由度のマス-バネ系モデルを用いて，離散系構造物に対する伝達境界の定式化を行なった．

2. 領域L,Rにおける波動伝播の条件

前述のような構造物における相互作用を考慮するため，図-1のような無限に続く一様なマス-バネ系モデルを考える．この中から任意の質点$r-1, r, r+1$を取り出し，質点rに着目して運動方程式を立てると，

$$-m\frac{d^2x_r}{dt^2}-(x_r-x_{r-1})k+(x_{r+1}-x_r)k=0 \tag{1}$$

この式は，考慮している無限のマス-バネ系のどの部分についても，rを変更することによって成り立つ式である．この式の変位は角振動数によって表すことができ，ある振動数ωに対し$x_r=u\eta^r e^{i\omega t}$の波動解が存在すると仮定する．ここで，$u$は水平方向の複素変位振幅である．同様に$r-1$，$r+1$番目の質点においても$\boldsymbol{x}_{r-1}=\boldsymbol{u}\eta^{r-1}\boldsymbol{e}^{i\omega t}$，$\boldsymbol{x}_{r+1}=\boldsymbol{u}\eta^{r+1}\boldsymbol{e}^{i\omega t}$の波動解が存在する．これらの解を式(1)に代入して整理すると，

$$\left\{\eta^2(-k)+\eta\left(-m\omega^2+2k\right)+(-k)\right\}u=0 \tag{2}$$

$u=0$以外の解を持つ条件から，角振動数ωに対して，$\eta^2(-k)+\eta(-m\omega^2+2k)+(-k)=0$を満たす固有値$\eta$を求めると，

$$\eta=\frac{(-m\omega^2+2k)\pm\sqrt{(m\omega^2-2k)^2-4k^2}}{2k} \tag{3}$$

指数関数で表すと$\eta=a\cdot e^{\pm i\phi}$（ただし，$a=\sqrt{(\mathrm{Re}(\eta))^2+(\mathrm{Im}(\eta))^2}=1,\ \phi=\cos^{-1}(\mathrm{Re}(\eta)/a)$）になる．

よって，

$$x_r=u\cdot a^r e^{\pm ir\phi}\cdot e^{i\omega t}=u\cdot e^{i(\omega t\pm r\phi)} \tag{4}$$

伝播条件によって

- φが虚数の場合，すなわち，ηが実数の2つの根を持つとき，$\omega^2>4k/m$：伝播しない．
- φが0の場合，すなわち，ηが実数の1つの根を持つとき，$\omega^2=4k/m$：standing wave
- φが実数の場合，すなわち，ηが共役複素数の根を持つとき，$\omega^2<4k/m$：伝播する．非減衰

3. 伝達境界の定式化

伝達境界を設定する方法は，式(4)のように表される波動が左右それぞれの方向に伝播するときの，領域Rと解析領域Ωの境界面における節点力(Q_R^R，Q_R^L)と，領域Lと解析領域Ωの境界面における節点力(Q_L^R，Q_L^L)を求め，その反力を解析領域Ωに作用する外力として与えることである．図-2のモデルおいて，領域Rの$r-1$番目の節点における水平方向の節点力と節点変位の関係式は式(5)のように表すことができる．

$$f_{r-1}=k(x_{r-1}-x_r) \tag{5}$$

ただし，$r-1$点における慣性項は解析領域Ωの中に取り込んでおく必要がある．ここで，正（右）の方向に波動が伝播した時の節点力を，複素節点外力振幅を用いて以下のように表すこととする．

$$Q_R^R=f_{r-1}=f_R^R\cdot e^{i\omega t} \tag{6}$$

複素節点外力振幅の上付文字は波動の伝播方向を，下付は領域を表す．

式(4)に表される右方向に波動が伝播するときの変位xと，式(6)で表される節点力fを式(5)に代入すると，

$$f_R^R\cdot e^{i\omega t}=k(ue^{i\omega t}e^{-i(r-1)\phi}-ue^{i\omega t}e^{-ir\phi}) \tag{7}$$

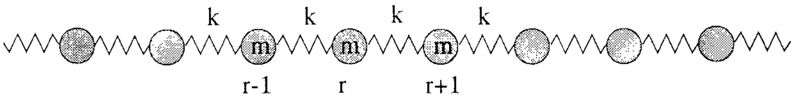


図-1　マス-バネ系モデル

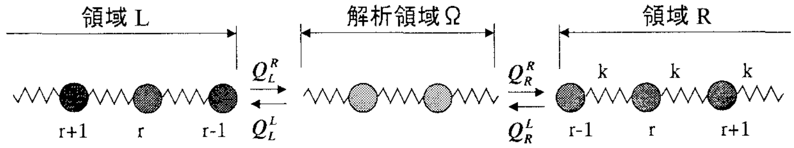
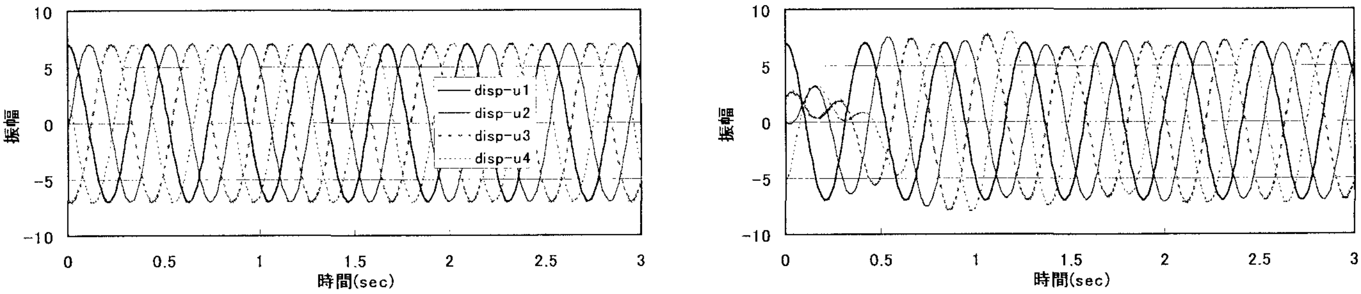


図-2　領域 L,R の境界面における節点力



a.境界 L に cos 波入力　　b.境界 L に cos 波入力（Fourier 解析）

図-3　各質点における変位の時刻暦応答

式(7)には場所を表す変数 r を含んでいる．$r=1$ とすると、

$$f_R^R = ku(1-e^{-i\phi}) = \left(k - ke^{-i\phi}\right)\cdot u = R_R \cdot u_R^R \tag{8}$$

同様に左方向に波動が伝播するときは　$f_R^L = ku(1-e^{+i\phi}) = \left(k - ke^{+i\phi}\right)\cdot u = L_R \cdot u_R^L$　(9)

領域 L の番号を右から付けて同様に求めると，次のようになる．

$$f_L^L = \left(k - ke^{-i\phi}\right)\cdot u = L_L \cdot u_L^L,\quad f_L^R = \left(k - ke^{+i\phi}\right)\cdot u = R_L \cdot u_L^R \qquad (10),(11)$$

4.　全体系の運動方程式

波動伝播のみを考慮した時の，解析領域Ωに接する，領域 R と領域 L の境界面における力の振幅は $f_R = f_R^R + f_R^L = R_R u_R^R + L_R u_R^L$，$f_L = f_L^R + f_L^L = R_L u_L^R + L_L u_L^L$ となる．よって，これらの反力を領域 L，R に接する解析領域Ωの境界面に，それぞれ外力として与えると，解析領域Ωにおける運動方程式は，

$$\left\{[K]_\Omega - \omega^2[M]_\Omega\right\}\{U\}_\Omega = \{P\}_\Omega - f_R - f_L = \{P\}_\Omega - [R]_R\{U\}_R^R - [L]_R\{U\}_R^L - [L]_L\{U\}_L^L - [R]_L\{U\}_L^R \tag{12}$$

ここで，境界上における変位振幅に注目すると，領域 L 側の境界上の変位振幅 $\left(\{U\}_L^L + \{U\}_L^R\right)$ は，$\{U\}_\Omega$ の最初の項の位置を同じ値で占めることになるので，$[L]_L\left(\{U\}_L^L + \{U\}_L^R\right) = [L]_L\{U\}_\Omega$ と書ける．領域 R 側も同様にして，式(12)に代入すると，

$$\left[\overline{K}\right]_\Omega\{U\}_\Omega = \{P\}_\Omega + \left([R]_R - [L]_R\right)\{U\}_R^L + \left([L]_L - [R]_L\right)\{U\}_L^R \tag{13}$$

ただし，$\left[\overline{K}\right]_\Omega = [K]_\Omega i\omega[C]_\Omega - \omega^2[M]_\Omega + [R]_R + [L]_L$ である．

5.　検証例

検証例として，4 つの質点をもつ解析領域を考える．伝播する条件を満たす波動（cos 波）を領域 L と解析領域との境界面に与えた時の各質点の応答変位（左から $u1, u2, u3, u4$）を図-3 に示す．a は複素変位振幅を波動式で表した波動であり，b は cos 波を時間間隔 0.01sec で離散化し，Fourier 変換を用いて解析した結果（解析時間 10 秒のうち 3 秒）である．0.5 秒以降は a と b は同じ波形になっている．

6.　まとめ

もっとも簡単な 1 自由度のマス-バネ系モデルを用いて，エネルギー伝達境界を定式化した．本研究のモデルでは，領域 L,R から入った波動はその振幅を保ち，位相をΦづつ変化しながら伝播することが検証例で確認された．このように，本モデルは伝播条件および伝達境界に対して明瞭な理解を与え，かつ検証することも可能である．今後，地震動および減衰の導入に対して研究を進める予定である．