VI－7

ラグランジュ緩和法によるマンスケジューリングの新解法

信州大学工学部　正会員　　奥谷　巖
信州大学工学部　学生会員　○津江　誠

1. はじめに

本研究はマンスケジューリング問題の新解法を提案するものである。我々は以前からマンスケジューリング問題について tabu 法 [1],遺伝的アルゴリズム,すみ分け協調型進化アルゴリズム [2],免疫的アルゴリズム [3]を用いて研究してきた。本研究では、発電機の運転計画の分野では主流の技術となっているラグランジュ緩和法 (Lagrangian　Relaxation)[4]を新解法としてマンスケジューリング問題に適用する。

2. ラグランジュ緩和法のスケジュールへの適用

＜2.1＞　目的関数の定式化

製品 j の完工日を s_j とすると着工日 t_j は

$$s_j = \text{完工日} = \text{着工日から加工日数だけ未来} = s_j(t_j) = t_j + d_j - 1 \quad (\text{ここに}d_j\text{は加工日数}) \tag{3}$$

となり、要するに、着工日が決まれば完工日が決まることになる。

プロジェクトが早期に終了するためには各作業の開始時刻が早いほうが良いため、

$$p(t) = \sum_{j=1}^{N} t_j \to \min \tag{4}$$

また各作業日の作業員数は少ないほうが良いため、

$$q(t) = \sum_k \sum_{j=1}^{N} \delta_{jk}(t_j) \times a_j \to \min \tag{5}$$

a_j：作業 j の必要作業員数

δ_{jk}:作業 j について、作業開始日 $k=t_j$ から完工日 $k=s_j$ までは $\delta_{jk}=1$、作業のない日は $\delta_{jk}=0$ として表す。

ここでは、(4),(5)式を一つの目的関数で表す。

$$z(t) = w_1 \sum_{j=1}^{N} t_j + w_2 \sum_k \sum_{j=1}^{N} \delta_{jk}(t_j) \times a_j \to \min \tag{6}$$

w_1, w_2：$w_1+w_2=1$ となる重み係数

この式は、各作業ごとに分離できるようになっている。これがラングランジュ緩和法の特徴である。

＜2.2＞　制約条件の定式化

各作業時刻 k における作業員数は経済的にも一定であることが望ましい。そのため以下のような制約を与える。

$$B \le \sum_{j=1}^{N} \delta_{jk}(t_j) \times a_j \le C \tag{7}$$

ここでは、B と C の値を試行錯誤で徐徐に近づけ、作業員数を平滑化する。次に作業員数余り、作業員数不足に注目して書き換えると、'を転置として

$$\begin{aligned} g(t) &= [\cdots\text{時刻kにおける作業員余り数}\cdot]' \\ &= [\cdots g_k(t) \cdots]' = [\cdots B - \sum_{j=1}^{N} \delta_{jk}(t_j) \times a_j \cdots]' \le 0 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} h(t) &:= [\cdots\text{時刻kにおける作業員不足数}\cdot]' \\ &= [\cdots h_k(t) \cdots]' = [\cdots \sum_{j=1}^{N} \delta_{jk}(t_j) \times a_j - C \cdots]' \le 0 \end{aligned} \tag{9}$$

この制約条件も目的関数と同様に、作業 j について分離可能である。

＜2.3＞　最適化問題

以上のことから、この場合の最適化問題は次のようになる。

$$\min_t \left\{ z(t) = w_1 \sum_{j=1}^{N} t_j + w_2 \sum_k \sum_{j=1}^{N} \delta_{jk}(t_j) \times a_j \;\middle|\; \begin{array}{l} B - \sum_{j=1}^{N} \delta_{jk}(t_j) \times a_j \le 0 \\ \qquad\qquad k = 1 \cdots K \\ \sum_{j=1}^{N} \delta_{jk}(t_j) \times a_j - C \le 0 \end{array} \right\} \tag{10}$$

＜2.4＞　ラグランジュ関数

＜3.3＞よりラグランジュ関数 L を求める。

$$L(t, \mu\, \lambda) = f(t) + \sum_{k=1}^{K} \mu_k g_k(t) + \sum_{k=1}^{K} \lambda_k h_k(t) \tag{11}$$

μ, λ をラグランジュ乗数と呼ぶ。

＜2.5＞　分問題への導出

(11)式を着工日 t について最小化したい。そのため扱いやすい形に変形しておく。

$$\begin{aligned} &\min \left\{ \sum_{j=1}^{N} z^j(t^j) + \sum_{k=1}^{K} \mu^k \left[B - \sum_{j=1}^{N} \delta^{jk}(t^j) \times a^j \right] + \sum_{k=1}^{K} \lambda^k \left[\sum_{j=1}^{N} \delta^{jk}(t^j) \times a^j - C \right] \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{N} \min \left\{ z^j(t^j) + a^j \sum_{k=t_j}^{s_j(t_j)} (-\mu^k + \lambda^k) \right\} + B \sum_{k=1}^{K} \mu^k - C \sum_{k=1}^{K} \lambda^k \end{aligned} \tag{12}$$

BΣμ-CΣλの項は作業 j に関係しないので(12)式も作業に関して分離可能になっている。そして、以下のような作業 j に関する部分問題として考える。

$$\min_t \left\{ z_j(t_j) + + a_j \sum_{k=t_j}^{s_j(t_j)} (-\mu_k + \lambda_k) \right\} \tag{13}$$

3. 解法

<3.1>　方針

(13)式をμ,λを双対変数とした双対問題として考え、μ,λを変化させ最適なスケジュールを探索する。μ,λの改訂方法を以下に示す。

$\mu,\lambda \to \mu,\lambda$+距離・方向　(14)

この方法により部分問題を全数探索で解く。以下に詳細を述べる。

<3.2>　方向

μ,λの改訂は、作業員数がB,Cを下回るなら増やし、上回るようなら減らすという方向だった。劣勾配方向、

$$l := [\cdots \partial L(t,\mu)/\partial\mu_k \cdots]' = g(t) \quad (15)$$

$$m := [\cdots \partial L(t,\lambda)/\partial\lambda_k \cdots]' = h(t) \quad (16)$$

は不足作業員数を時間kごとに計っているのでこの方向に合う。

<3.3>　実行可能化

計算途中で得られるスケジュールは通常実行不可能であるため実行可能に直す必要がある。そのためにはできない作業を後回しにすればよい。そのためには重なった作業のうち作業員数が多い作業jを1日延期する。つまり$t_j \to t_j+1$とするのである。

<3.4>　距離

すべての作業を最早開始時刻ではじめたととして(11)式を計算して得られた値$\underline{L}$と、それを無理やり実行可能に直して(11)式を計算して得られた値$\overline{L}$の間に必ず最適値L^*が存在する。それを手掛かりに進む距離を決める。双対ギャップ$\Delta=\overline{L}-\underline{L}$は、最適値$L^*$からの遠さの目安になる。(15)(16)式のl,mは微分のようなものだから、$d\mu := [\cdots d\mu_k \cdots]'$として$l'd\lambda \approx dL$である。制約違反と$\mu$の修正方向$d\mu$はほぼ同方向で、$\|l'd\mu\| \approx \|l\|\|d\mu\| \approx dL$である。ここで、達したい高さ$=dL \approx \Delta$とすると、進むべき距離は$\|d\mu\| \approx \Delta/\|l\|$となり、$\lambda$も同様にして$\|d\lambda\| \approx \Delta/\|m\|$となる。$\Delta$でdLを見積もったのでは、本当は大きすぎる。そこで、α,βを任意の数として進む距離は$\alpha\Delta/l$, $\beta\Delta/m$とする。

<3.5>　μ,λの改訂

方向と距離についてまとめると、(14)式の具体的な形は次のとおりで、μ,λの改訂はこれにしたがって行う。

$$\mu \to \left(\mu+\alpha\frac{\Delta}{\|l\|}\frac{l}{\|l\|}\right)^+ = \left(\mu+\alpha\frac{\overline{L}-\underline{L}}{l'l}l\right)^+$$
$$\lambda \to \left(\lambda+\beta\frac{\Delta}{\|m\|}\frac{m}{\|m\|}\right)^+ = \left(\lambda+\beta\frac{\overline{L}-\underline{L}}{m'm}m\right)^+ \quad (17)$$

修正方向は単位長に基準化した。非負部分$(\cdot)^+$を取るのは、μ,λの非負条件を強引に満たすためである。

4. 有効性の検討

<3.3>,<3.5>の操作を繰り返し最適なスケジュールを求め、そのデータをもとに適応度Fを計算する。適応度Fについての定義は以下の通りである。プロジェクトの計画目標、プロジェクト完了時刻Tの最小化,最大投入資源量R(時刻kの投入資源量をR_kとしたとき、その最大値)の最小化,遊休資源を少なくするための平滑度S($=\sum R_K{}^2-\overline{R}^2$):$\overline{R}$は$R_k$の平均 の最小化という3つの計画目標を同時に考慮する簡単な方法として線形結合による和を考える方法を採用する。これらの目標は無次元ではないので、まずそれらを無次元化し、適応度f_iという1以下の非負数に変換する。

$$f_i = \frac{Y_{max}-Y_i}{Y_{max}-Y_{min}} \quad (18)$$

ここにY_iはi=1,2,3,の順にT、R、Sの値をとるものとする。このときのネットワークの適応度を

$$F = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i f_i \quad (19)$$

として求める。ただしα_iは和が1となる各目標のウエイトである。このようにして得られた適応度Fとこれまでの手法、tabu法,遺伝的アルゴリズム,すみ分け型進化アルゴリズム,免疫的アルゴリズムの結果を比較検討する。

その結果は、用紙の都合上割愛させていただき、講演時に発表する。

5. おわりに

本研究では、マンスケジューリング問題の新たな解法としてラグランジュ緩和法を適用したモデルを提案した。この手法は、問題を解きやすい形に定式化することで計算時間を短縮できる特徴がある。今後の課題としては、計算時間,適応度の両面でさらに良好な結果が得られる手法の適応が望まれる。

参項文献

1) 奥谷巖、福井紀行、風間克則:マン・スケジューリングにおけるタブー探索法の適用;土木計画研究論文集, No. 13, 1996.
2) 奥谷巖、神出幸治、津江誠:すみ分け協調型進化アルゴリズムによるプロジェクトスケジューリング;建設マネジメント論文集, 1999.
3) 奥谷　巖,津江誠:マンスケジューリング問題の新解法について;土木学会中部支部研究発表会講演概要集, VI-10, pp601~602, 2000
4) 米田　清:ラグランジュ緩和法によるスケジューリング;システム/制御/情報,Vol.41,No.4,pp.130-138,1997.