数値実験によるファジィフィルタの性能検証

信州大学　フェロー　奥谷　巖
信州大学　　　　　〇藤原　直樹

1. まえがき

われわれは先にファジィ線形回帰分析のより簡便で有効な方法として、最小二乗モデルを提案した。
この方法は変数に制約がない場合には求解は掃き出し法等の方法で線形連立方程式を解くだけの手続きに依ればよく、極めて便利な側面を有していたが、例えば変数の和が定数にならなければならないといった制約条件が加わってくると、2 次計画法によって解を求める必要があり、計算時間の点で若干の問題を残していた。

一方、同様な線形結合式のパラメータ同定モデルとして、カルマンフィルタがあり、逐次計算法という簡便な方法で求解できると同時に、定数値を観測量とみなすことで、ある種の変数制約に対処できるという利点を有していた。

そこで、本研究においては、両者の結合モデルとしてファジィフィルタモデルを提案し、乱数を使った数値実験を通してその有効性を調べてみることとした。

2. パラメータ同定

いま、観測量(被説明変数)となるファジィ数を次のように定義する。

$Y_j(k)$：個体(又は時点) k の j 番目の観測変量

ファジィ数の表現にはいろいろなものが考えられるが、本稿では実用性の最も高い対称な三角形ファジィ数を採用する。すなわち

$$Y_j(k)=(y_j(k),q_j(k))_L \quad (j=1\sim n, k=1\sim K) \quad (1)$$

ここに

$y_j(k)$：三角形メンバシップ関数の中心

$q_j(k)$：三角形メンバシップ関数の幅

説明変数はクリスプとし

$x_i(k)$：個体(又は時点) k の i 番目の説明変数 $(i=1\sim m)$

最後に、パラメータとなるファジィ数を

$H_{ji}(k)$：個体(又は時点) k の j 番目観測量を説明する i 番目状態量の係数

とし、その三角形メンバシップ関数を

$$H_{ji}(k)=(h_{ji}(k), w_{ji}(k))_L \quad (j=1\sim n, i=1\sim m) \quad (2)$$

として表す。ただし、

$h_{ji}(k)$：$H_{ji}(k)$の中心

$w_{ji}(k)$：$H_{ji}(k)$の幅

上で定義した観測量 $Y_j(k)$と状態量$x_i(k)$の関数を表す、いわゆる観測方程式としては

$$Y_j(k)=H_{j1}(k)x_1(k)+H_{j2}(k)x_2(k)+\cdots+H_{jm}(k)x_m(k)+E_j(k) \quad (3)$$

のような線形式を考える。$E_j(k)$は誤差項であり、ファジィ数と同様に中心と幅に対応する量を与えて定義するが、幅に対応する量に負数も容認する。

$$E_j(k)=(e_j(k),v_j(k))_L \quad (4)$$

ここでの問題は、観測ファジィ数 $Y_j(k)$と状態量$x_i(k)$ $(k=1,2,3\cdots,K)$のデータから、パラメータ H_{ji}をどのように同定するかということである。

パラメータ $H_{ji}(k)$は、本来 k によらない定数値であるが、ここでは後に示す式展開との関係で k によって変わるという表現を敢えて採用している。また、被説明変数についても通常の線形システムならば1変数でよいが、ここではより一般性を指向し最初からn変数でも扱えるようにしている。さらに、(3)式の右辺には定数項が入っていないが、例えばそれを $H_{ji}(k)$とした場合、新たな状態量$x_0(k)$を人為的に導入し、そのデータを常に 1 に固定しておくことで全く同じ論理展開が可能であり問題はない。

さて、パラメータ $H_{ji}(k)$を同定するに際し、本研究では次に示すようなパラメータの遷移式を仮定する。

$$H_{ji}(k+1)=H_{ji}(k)+D_{ji}(k) \quad (5)$$

ここに、$D_{ji}(k)$は先に述べた $E_j(k)$と同じ性質を持つ誤差項であり

$$D_{ji}(k)=(d_{ji}(k), u_{ji}(k))_L \quad (6)$$

(3)式および(5)式を利用して $H_{ji}(k)$を同定するが、そのためにまずこれらの式を中心と幅の関係に分けて書き直しておく。(3)式と(5)式の中心の関係式を表す式は

$$y_j(k)=\sum_{i=1}^{m}\left(h_{ji}(k)x_i(k)+e_j(k)\right) \quad (7)$$

$$h_{ji}(k+1)=h_{ji}(k)+d_{ji}(k) \quad (8)$$

いま、

$$y(k)=(y_1(k),y_2(k),\cdots,y_n(k)) \quad (9)$$

$$e(k)=(e_1(k),e_2(k),\cdots,e_n(k)) \quad (10)$$

$$h(k)=(h_{11}(k),h_{21}(k),\cdots,h_{n1}(k),h_{21}(k), h_{22}(k),\cdots,h_{n2}(k),\cdots, h_{1m}(k), h_{2m}(k),\cdots,h_{nm}(k)) \quad (11)$$

とし、$\Lambda(k)$を$X_i(k)$を適当に並べたn×nmの行列とすると、(7)式は

$$y(k)=\Lambda(k)h(k)+e(k) \quad (12)$$

また(8)式は

$$h(k+1)=h(k)+d(k) \quad (13)$$

のようにまとめて行列表示する事が出来る。ただし、d(k)は$d_{ji}(k)$をh(k)と同様に並べたベクトルである。

いくつかの仮定のもとに(12)式，(13)式で表されるシステムに対してカルマンフィルタ理論が適用でき,h(k)の推定値$\hat{h}(k)$が次式のように与えられる。

$$\hat{h}(k|k)=\hat{h}(k-1|k-1)+K(k)[y(k)-\Lambda(k)\hat{h}(k-1|k-1)] \quad (14)$$

ここに、k(k)はカルマンゲインで

$$K(k)=S(k)\ \Lambda^T(k)\,[\Lambda(k)\ S(k)\ \Lambda^T(k)+R_2]^{-1} \quad (15)$$

$$S(k)=P(k-1)+R_1 \quad (16)$$

$$P(k)=S(k)+K(k)\ \Lambda(k)\ S(k) \quad (17)$$

$$S(1)=R_0 \quad (18)$$

$$\hat{h}(0|0)=\mu \quad (19)$$

ただし、R_1,R_2はそれぞれd(k),e(k)の分散・共分散行列、R_0はh(1)の分散・共分散行列、μはh(1)の期待値、S(k), P(k)はそれぞれy(k)が得られる前のh(k)の推定値$\hat{h}(k|k-1)$,得られた後の推定値$\hat{h}(k|k)$の推定誤差の分散・共分散行列である。

同様にして、(3)式と(5)式の幅の関係を表す式は

$$q_j(k)=\sum_{i=1}^{m}\left(w_{ji}(k)x_i(k)+v_j(k)\right) \quad (20)$$

$$w_{ji}(k+1)=w_{ji}(k)+u_{ji}(k) \quad (21)$$

(20),(21)式より

$$\hat{w}(k|k)=\hat{w}(k-1|k-1)+K(k)[q(k)-\Lambda(k)\hat{w}(k-1|k-1)] \quad (22)$$

のようにw(k)の推定値を求めることが出来る。

最終的に(3)式のような線形システムにおけるパラメータを$\hat{h}(k|k)$, $\hat{w}(k|k)$の収束値で与えるようにすればよい。このようにして求められるパラメータをあらためてh_{ji}, w_{ji}と書き(7)式あるいは(19)式に代入するとともに、$x_i(k)$の状態方程式を与えるようにすれば、カルマンフィルタ理論に従って状態量を推定することも可能となる。

3. 数値実験

まず状態量については、$x_i(k)$の期待値を与えた後同一のkについてN_d個の正規乱数を準備する。同定すべきパラメータについてもh_{ji}の期待値を定めた後に、1つのkに対してN_d組正規乱数を発生させる。

このN_d組の状態量とパラメータを用いて(6)式右辺の線形結合項を計算し、期待値0の正規乱数で与えた誤差項を加えることでN_d個の$Y_j(k)$のデータをつくる。

N_d個の$x_i(k)$の平均値をあらためて$x_i(k)$とし、$y_j(k)$の標準偏差のδ倍で$Y_j(k)$の幅を、$y_j(k)$の平均値で中心を与える。これによって必要なデータがすべて揃うので$h_{ji}(k)$, $w_{ji}(k)$の同定値$\hat{h}_{ji}(k|k)$, $\hat{w}_{ji}(k|k)$が求められ、その収束値として最終的なパラメータの中心(＝h_{ji})と幅(＝w_{ji})を決定することが可能となる。

状態量$x_i(k)$の推定実験についても、上と同様な乱数発生メカニズムによって$x_i(k)$, $Y_j(k)$のデータを与え、同定された$H_{ji}=(h_{ji}, w_{ji})_L$を用いて(3)式と同様な観測方程式を構成するとともに、$x_i(k)$の遷移式として(7)式と同様な式を採用するようにすれば$\hat{x}_i(k|k)$が求められ、真値$x_i(k)$との比較照合を通して推定精度を議論することができる。

4. むすび

本研究では、ファジィ性のある観測量（被説明変数）およびパラメータから構成される線形システムのパラメータ同定を状態量推定にフィルタ理論を用いる新たな方法を提案し、数値実験によってその有効性を調べる事を考えた。

実験結果については紙面の都合上省略したが、当日に発表する予定である。

なお、状態量がファジィ数で与えられ、パラメータがクリスプの場合についても同じような理論展開が可能であるが、詳細については稿を改めたい。

参考文献

1) 奥谷・高瀬：シュミレーションによるファジィ最小二乗法の適用安定性の検討，土木学会中部支部研究発表会講演概要集，pp,501－502,2000