波動問題の境界要素解析における反復法の前処理について

福井大学工学部　　　　　○ 大 澤 克 樹
福井大学工学部　正会員　　福 井 卓 雄

1 はじめに

境界要素法の大規模問題を高速に解析する手法として高速多重極法を用いる方法が近年注目されてきている。とくに, 波動問題においては, 無限領域を取り扱うことが多く境界要素法の利用が有利である。その場合であっても, 周波数の高い問題を取り扱う場合には要素のサイズを小さくする必要があり, 必然的に要素数の大きな問題を扱うことが必要になる。このような問題に高速多重極法による解法の効率化は有効である。高速多重極法を利用する場合には, 近似離散方程式を反復法により解かなければならないが, 適切な反復回数で解を得るためには, 問題に応じた前処理が是非必要である。本研究では, Helmholtz 方程式の境界要素解析における前処理法についていくつかの手法を試み, 有効な前処理法を探索する。

ここでは, 2 次元 Helmholtz 方程式の解析を対象として, 従来型の境界要素法を使って, 反復法による解析を行ない, 高速多重極法を使う場合にも利用できるいくつかの前処理法について検討した。

2 境界積分方程式

2 次元空間中の周波数領域波動散乱問題を考える。散乱体の外部領域を B, 境界を ∂B とする。波動場 u は Helmholtz 方程式を満足する。境界値問題は

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad \text{in } B, \qquad u = \hat{u} \quad \text{on } \partial B_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \hat{s} \quad \text{on } \partial B_2 \tag{1}$$

である。ここに, ∇^2 は Laplace 作用素, k は波数, $\partial/\partial n$ は外向き法線微分を示す。

この問題の解 u は, 一般化された Green 公式により積分表現され, 通常は, Green 公式をそのまま境界積分方程式として使って, その離散解析を行なう。しかしながら, 外部領域における境界要素解析においては, 本来存在しないはずの仮想的な固有値により数値解が乱されるという問題が起こりうる。とくに, 波数の大きな問題においては数値解の乱れは深刻であり, 反復法がまったく収束しない場合もありうる。ここでは, 仮想固有値の影響を避けるために, Burton と Miller により提案された境界積分方程式

$$\frac{1}{2}\left[u(\boldsymbol{x}) + \alpha\frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{x})\right] = \left[\tilde{u}(\boldsymbol{x}) + \alpha\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}(\boldsymbol{x})\right] + \int_{\partial B}\left[G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \alpha\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial n_x}\right]\frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{y})\, ds_y - \int_{\partial B}\left[S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \alpha\frac{\partial S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial n_x}\right]u(\boldsymbol{y})\, ds_y \tag{2}$$

を使う [1]。ここに, $\tilde{u}$ は入射波, G, S は基本特異解および第二基本特異解である。上式は, Green 公式とその境界上の法線勾配の線形結合をとったものであり, 結合パラメータ α は複素数である。ここでは, $\alpha = -i/k$ を用いている。

3 前処理の方法

一般に, 線形方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ を反復法で解く場合に, 行列 $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ を適当に選んで, 等価な方程式

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}, \qquad \text{ここに} \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}_2^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{M}_2\mathbf{x}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{b} \tag{3}$$

に変換して解くことが行なわれる。変換後の行列が $\mathbf{A} \simeq \mathbf{I}$ であれば, 反復法は極めて速く収束する。変換 (3) を前処理と呼んでいる。

以下では, いくつかの前処理法について, 境界積分方程式 (2) を GPBiCG[3] を使って解き, それらの特性について見る。

4 前処理法とその効果

次の 3 種類の前処理法について解析を行なった。

Jacobi 法 最も簡単な前処理法で, 前処理行列 **M** の成分を

$$m_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & \text{if } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

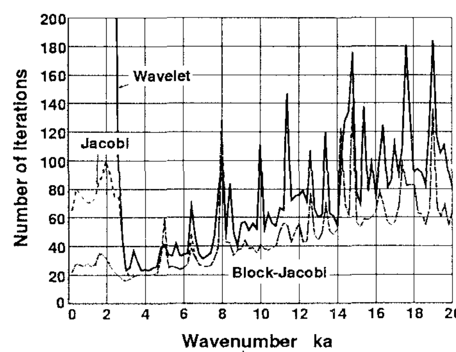
とする。いわゆる行や列のスケーリングとして知られる方法であるが, 一般に, 境界要素法に現れる行列は比較的性質が良いので, 問題によってはこれで十分な場合も多い。

ブロック Jacobi 法 Jacobi 法の対角成分のかわりに, 対角部分の小行列を取り出して **M** とする方法である。Jacobi 法よりも多くの情報を反映できるので, 一般に収束性は上がる。ただし, 反復ごとに小行列を解くことになるので, 大きめの小行列を選ぶ場合には一反復あたりの計算時間は増加する。

Wavelet 変換と Jacobi 法の併用 任意のベクトル **v** について, Haar wavelet 変換 **Wv** は直交変換となる。したがって, 行列 **A** を $\mathbf{WAW}^T$ のように変換しても, その性質は改善されない。しかし, 変換後の行列では, 対角付近にもとの行列の全情報が集中する傾向がある。そこで, 変換後の行列に Jacobi 法を併用してやれば, 収束性が改善されると期待できる [2]。

図–1 および 表–1 に, $2a \times 2a$ の正方形散乱体 (要素数 $N = 256$) の解析において得られた結果の一部を示す。図–1 は, 反復回数を波数に対してプロットしたものである。一般的傾向として, 反復数は波数とともに増加する。また, 表–1 は, いくつかの波数に対して, 要素数を増加させたときの反復数の変化を見たものである。一般に, 要素数が増加するとともに, 反復数は増加する。

ここで使用した前処理法では, ブロック Jacobi 法が最も効果があり, 他の方法はそれよりも劣っている。しかしながら, 図–1 では, ある波数以上については, Jacobi 法とブロック Jacobi 法はほぼ同じ程度の反復数を示しており, ブロック Jacobi 法が格段に優れているとは言い難い。また, Laplace 方程式の場合には極めて効果的であった wavelet 変換による方法の効果も明白ではない [2]。これらの点については, 今後, 条件を変えた解析を行ない, さらに検討する必要があると考えられる。



図–1 波数による反復回数の変化

表–1 Jacobi 法, ブロック Jacobi 法 および wavelet 変換+Jacobi 法の反復回数

ka	Jacobi					Block Jacobi (16)					Wavelet transform				
	128	256	512	1024	2048	128	256	512	1024	2048	128	256	512	1024	2048
5	62	74	129	199	268	16	23	31	51	87	55	119	257	635	272
10	34	67	104	179	281	12	18	23	37	64	33	63	124	279	680
20	16	38	83	122	247	10	12	18	24	–	19	39	70	152	272

参考文献

[1] 福井卓雄, 勝本順三, 稲津恭介: 波数の大きな波動問題の高速多重局境界要素法による解析について, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, **9**, pp. 79-84, 1999.

[2] 福井卓雄: Wavelet 変換を用いた境界要素反復解法における前処理, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, **9**, pp. 85-90, 1999.

[3] Zhang, S.-L.: GPBi-CG : generalized product-type methods based on Bi-CG for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Comput.*, **18**, pp. 537–551. 1997.