

高速多重極境界要素法による半空間中の音響場の解析

福井大学工学部

○ 小塚 みすず

福井大学工学部 正会員

福井 卓雄

1 はじめに

本研究では、屋外の音響場を解析することを目標に、地表から上の空間を半空間と考えて、その中での波動問題を高速多重極境界要素法を用いて解析する手法を開発する。屋外音響場を考える場合、本来は3次元問題として扱うべきであるが、ここでは、2次元問題についてまず手法を確立する。

2 半空間における境界積分方程式

図-1のように、空間を2分する直線を ∂H とし、対象とする半空間を H としよう。ここで、 ∂H は半空間 H に対して外向きになるようにとるものとする。半空間中の散乱体の境界を ∂B とし、 ∂H から ∂B によって覆われる部分を除いた境界を ∂H_B とする。対象となる領域 B は $\partial B + \partial H_B$ を境界とする無限空間である。

いま、音響場(音圧または速度ポテンシャル)を u として、 ∂H_B の上で境界条件 $\partial u / \partial n = 0$ が与えられているとする。このとき、境界値問題は

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad \text{in } B \quad (1)$$

$$u = \hat{u} \quad \text{on } \partial B_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \hat{s} \quad \text{on } \partial B_2 \quad (2)$$

$$u = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial H_B \quad (3)$$

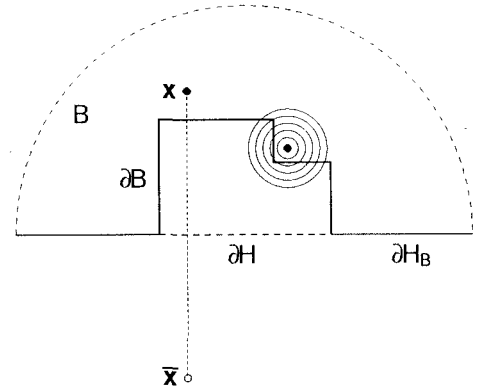


図-1 半空間中の音響場

となる。ここに、 ∇^2 はLaplace作用素、 k は波数、 $\partial / \partial n$ は外向き法線微分を示す。

Green 公式を導くにあたって、半空間における Green 関数

$$G_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + G(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}|) \quad (4)$$

を使う。Green 関数 G_H は ∂H_B における境界条件を満足するから、Green 公式は

$$C(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = \tilde{u}(\mathbf{x}) + \int_{\partial B} \left[G_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) - \frac{\partial G_H(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} u(\mathbf{y}) \right] ds_y \quad (5)$$

となる。ここに、 $\tilde{u}$ は ∂H_B における境界条件を満足する入射波で、 C は点 $\mathbf{x}$ の位置に依存するパラメータで、 $\mathbf{x}$ が領域内のとき $C = 1$ 、領域外のとき $C = 0$ 、滑らかな境界 ∂B 上にあるとき $C = 1/2$ の値をとる。

屋外音響を扱う場合には極めて高い波数の問題を解析する必要がある。この場合の仮想固有値の影響を避けるために、ここでは、Burton と Miller により提案された境界積分方程式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[u(\mathbf{x}) + \alpha \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) \right] &= \left[\tilde{u}(\mathbf{x}) + \alpha \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}(\mathbf{x}) \right] \\ &+ \int_{\partial B} \left[G_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha \frac{\partial G_H(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_x} \right] \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) ds_y - \int_{\partial B} \left[\frac{\partial G_H(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} + \alpha \frac{\partial^2 G_H(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_x \partial n_y} \right] u(\mathbf{y}) ds_y \end{aligned} \quad (6)$$

を解析に使った。

3 半空間における高速多重極法

図-2のように鏡像空間を考慮し、Green 公式 (5) を書きなおすと

$$\begin{aligned}
 C(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) &= \tilde{u}(\mathbf{x}) \\
 &+ \int_{\partial B} \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) - \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_{\mathbf{y}}} u(\mathbf{y}) \right] ds_{\mathbf{y}} \\
 &+ \int_{\partial \bar{B}} \left[G(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) - \frac{\partial G(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})}{\partial n_{\bar{\mathbf{y}}}} u(\mathbf{y}) \right] ds_{\bar{\mathbf{y}}} \quad (7)
 \end{aligned}$$

となる。したがって、鏡像境界上の境界値を

$$u(\bar{\mathbf{y}}) = u(\mathbf{y}), \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(\bar{\mathbf{y}}) = \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) \quad (8)$$

としてやれば、全空間の境界 $\partial B + \partial \bar{B}$ における境界積分表現が得られる。この積分を高速多重極法を使って計算すれば、容易に境界積分方程式を解くことができる。

半空間における高速多重極法の計算手順は次のようになる。

1. まず、半空間の境界 ∂B だけを木の構造に分割する。鏡像空間におけるセルは、実空間のセルの鏡像をとることにより定義できる (図-3)。
2. 上向演算により半空間内のセルにおける多重極モーメントを求める。鏡像空間のセルにおける多重極モーメントは、関係

$$M_n(\bar{\mathbf{y}}_0) = (-1)^n M_{-n}(\mathbf{y}_0) \quad -\infty < n < \infty \quad (9)$$

により、容易に決定できる。

3. 下向演算は、半空間中のセルについてだけ、通常的高速多重極法と同様に行なう。ただし、近傍演算において、鏡像領域にセルが存在する場合には、直接に鏡像の計算をする。

この方法による計算量は、鏡像空間を含めた全空間を解析する場合の約半分であった。

数値解析例

長さ 50m, 高さ 10m の建物の角部の、地表から 1.5m, 壁から 1.5m の位置に点音源がある場合の周辺の音圧分布を計算した結果を図-4に示す。音源の周波数は 100Hz と 500Hz とした。500Hz の場合には、波長が約 78cm となる。解析モデルでは、2000Hz 程度まで解析が可能のように、10m を 512 分割した要素を用いている。図は、建物から 20m, 地表から 20m の範囲の音圧の絶対値の等高線を示したものである。周波数による音圧分布の違いが明らかである。

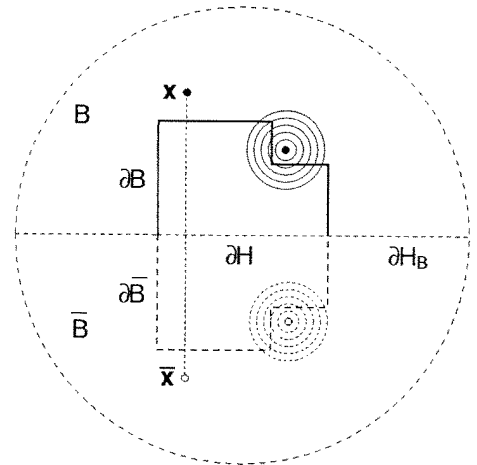


図-2 実空間と鏡像空間

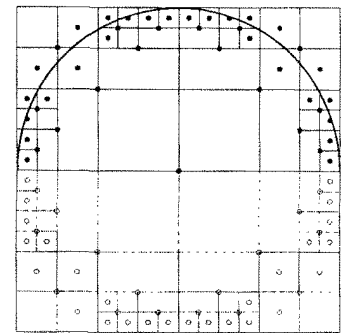


図-3 境界のセル分割

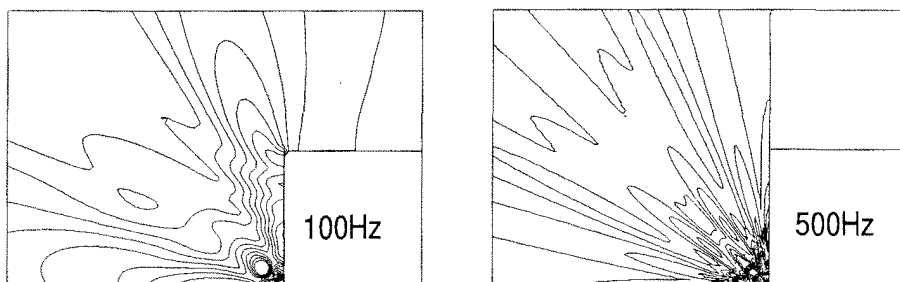


図-4 建物角部における音圧の絶対値の分布