

円周方向に変厚な扇形 Mindlin 板の振動解析

大同工業大学 学員 ○木村健一 大同工業大学 正員 水澤富作

1. まえがき 扇形板は、曲線スラブなどの構造要素として用いられており、その振動特性を知ることは、設計上重要な課題である。実際に用いられる扇形板の板厚は、半径方向または円周方向にステップ状またはテーパ状に変化する場合がある。このような変厚を持つ扇形板の振動解析は、支持される境界条件に関係なく厳密な解を求めることが困難な問題の1つである。これまでに、半径方向に変断面を有する扇形板については Kim らの薄板理論に基づく Ritz 法を用いた研究や水澤らの Spline 要素法を適用した研究などがあげられる。しかしながら、円周方向に変断面形状を有する扇形板の振動解析に関する研究はさほど研究されていない。本文では、Mindlin 板理論に基づく Spline 要素法を用いて、円周方向に任意の変断面形状を有する扇形板の振動解析を行い、本手法の解析精度や収束性について検討した。また、任意の境界条件を持つ扇形変厚板の振動特性に与える変厚比、半径比や中心角などの影響について明らかにしている。

2. 式の定式化 Mindlin 板理論とポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて、Fig.1 に示すような円周方向に変厚な Spline 要素モデルを導く。式の定式化にあたり、次式で表される無次元座標系を用いる。

$\xi = \theta/\phi, \eta = (r - R_i)/B, W' = W/B \dots (1)$ ここで、 W はたわみであり、 $B = R_i(\lambda - 1)$ は板幅、 $\lambda = R_o/R_i$ は半径比、 ϕ は中心角、 r は半径であり、また、 R_i と R_o は、それぞれ扇形板の内径と外径を示す。横せん断変形と回転慣性の影響を考慮した Mindlin 板理論では、それぞれ独立した次式の変位関数が要素内で仮定される。

$$\begin{aligned} \phi_\theta &= \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_A\}_{mn} \\ \phi_r &= \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_B\}_{mn} \\ W &= \sum_{m=1}^{i_\theta} \sum_{n=1}^{i_r} C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_C\}_{mn} \dots (2) \end{aligned}$$

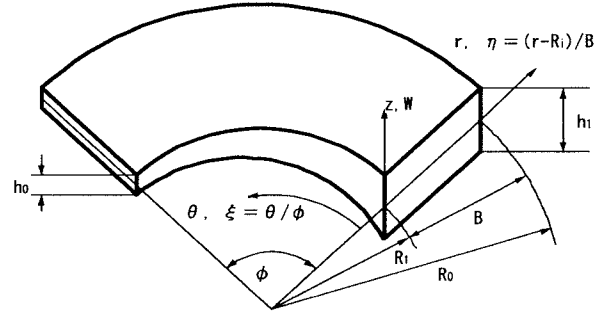


Fig. 1 Annular sector Mindlin plate with varying thickness in the circumferential direction and coordinate systems.

板厚が凸型断面の場合は、次式で表される。 $h(\xi) = h_o \{\delta - (\delta - 1)(1 - \xi)^p\} = h_o H(\xi) \dots (3)$ また、凹型断面の場合は、 $h(\xi) = h_o \{(\delta - 1)\xi^p + 1\} = h_o H(\xi) \dots (4)$ で与えられる。ここで、 δ は変厚比であり、 h_1/h_o で表される。また、上式において、板厚断面の形状を表す多項式の次数、 p を 1 に仮定すると、板厚断面は線形的に変化することになる。変厚扇形 Mindlin 板のひずみエネルギー、 U と運動エネルギー、 T は、

$$\begin{aligned} U &= (\phi B^2/2) \int_0^\phi \int_{R_i}^{R_o} \left\{ \{\epsilon\}_b^T [D] \{\epsilon\}_b + \{\epsilon\}_s^T [D] \{\epsilon\}_s \right\} Ad\xi d\eta \\ &= (D_o \phi/2) \int_0^\phi \int_0^1 \left\{ H(\xi) \left\{ (1/\phi/A) (\partial \phi_\theta / \partial \xi) + (\phi_r/A) \right\}^2 + (\partial \phi_r / \partial \eta)^2 + 2\nu \left\{ (1/\phi/A) (\partial \phi_\theta / \partial \xi) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\phi_r/A) (\partial \phi_r / \partial \eta) + 0.5(1 - \nu) \left\{ (\partial \phi_\theta / \partial \eta) + (1/\phi/A) (\partial \phi_r / \partial \xi) - (\partial \phi_\theta / \partial \eta) \right\}^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + 6(1 - \nu) \left\{ (B/h_o) H(\xi) \left\{ (1/\phi/A) (\partial W' / \partial \xi) + \phi_\theta \right\}^2 + \left\{ (\partial W' / \partial \eta) + \phi_r \right\}^2 \right\} \right\} Ad\xi d\eta \end{aligned} \dots (5)$$

$$T = (\rho h_o/2) \omega^2 \phi B^4 \int_0^\phi \int_0^1 \left\{ H(\xi) W'^2 + (1/12) (h_o/B)^2 H(\xi) (\phi_\theta^2 + \phi_r^2) \right\} Ad\xi d\eta \dots (6)$$

で与えられる。ここで、 $D_o = Eh_o^3/12(1 - \nu^2)$ 、 $A = \{\eta + 1/(\lambda - 1)\}$ であり、 ρ, ω は密度と円振動数(rad/sec)である。変厚扇形 Mindlin 板の全ポテンシャルエネルギー、 Π は、次式で示される。 $\Pi = U - T \dots (7)$ したがって、式(2)を式(6)に代入し、 Π を極値化すれば、次式の固有方程式が得られる。 $\partial \Pi / \partial \{\Delta\}_s = 0 \dots (8)$

3. 数値計算例および考察

以下の数値計算例では、ポアソン比は $\nu = 0.3$ を用いる。Table.1 には、円周方向に線形的に板厚が変化する

周辺固定された扇形板の振動数パラメータ, $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}$ の収束性に与える要素分割数の影響が示されている。ここで, 変厚比 $h_1/h_0 = 2.0$, 半径比 $R_0/R_i = 2.0$, 中心角 $\phi = 45^\circ$ を用いている。また, 幅厚比 $B/h_0 = 10, 100$ にとり, 要素分割数, $M_r = M_\theta$ は2から14分割まで変化させている。これにより, 幅厚比に関係なく要素分割数の増大に従って, 一定値への安定した収束状態が得られている。以後の計算例では, $M_r = M_\theta = 12$ としている。Table.2 には, 円周方向に線形および放物線状に板厚が変化する周辺固定された扇形板の振動数パラメータ, $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}$ の精度比較が示してある。ここで, 変厚比 $h_1/h_0 = 0.5$, $R_0/R_i = 5.0$, $\phi = 60^\circ$, $B/h_0 = 100$ を用いている。Kim ら¹⁾は, 直交多項式を変位関数に用いた Ritz 法により解析している。これにより, 本手法による解は, 他の数値解析法による値と良く一致している。Fig.2 は, 円周方向に線形的に板厚が変化する周辺固定された扇形板の振動数パラメータ, $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}$ に与える変厚比 h_1/h_0 と幅厚比 B/h_0 の影響を示している。ここで, $R_0/R_i = 2.0$, $\phi = 45^\circ$ を用いている。また, h_1/h_0 は1.0から2.0まで変化させ, また幅厚比は5, 10, 100 仮定している。これにより, 変厚比の増大とともに振動数は増大する。また, 幅厚比が大きいと直線的に変化するが, 板厚の増大に伴い, 横せん断変形と回転慣性の影響により, 振動数パラメータは非線形な性状を示す。

4. まとめ 本文で得られた主な結果を示すと以下のようになる。1) 本手法を用いれば任意の変断面と境界条件を持つ扇形 Mindlin 板の振動解析ができ, また, 解の安定した収束性と精度が得られる。2) 変厚扇形 Mindlin 板の振動数は, 幅厚比や変厚比の影響を大きく受ける。とくに, 幅厚比が大きいと直線的に変化するが, 板厚の増大に伴い, 横せん断変形と回転慣性の影響により, 振動数パラメータは非線形な性状を示す。

参考文献 1) Kim et. al.: J. Sound and Vibr. Vol. 134, 1989. 2) 水澤他: 構造工学論文集, Vol. 45A, 1999.

Table.1 Convergence study of frequency parameters, n^* of fully clamped annular sector thick plates of tapered thickness in the circumferential direction: $h_1/h_0 = 2.0$, $\phi = 45^\circ$, $R_0/R_i = 2.0$

B/ h_0	$M_r = M_\theta$	Modes				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
10.0	2	34.16	46.12	57.97	68.52	78.28
	4	38.50	64.75	76.32	97.39	100.2
	6	38.56	64.46	76.03	97.50	100.2
	8	38.59	64.48	76.06	97.32	100.3
	10	38.60	64.50	76.08	97.33	100.3
	12	38.61	64.52	76.09	97.34	100.3
100.0	14	38.61	64.52	76.10	97.35	100.4
	2	76.37	122.3	222.4	250.9	385.0
	4	48.71	115.8	137.0	190.0	397.8
	6	46.20	87.65	104.8	148.6	174.7
	8	45.81	83.72	101.4	141.1	146.9
	10	45.72	82.98	100.9	137.4	143.7
	12	45.70	82.79	100.7	136.3	143.2
	14	45.69	82.74	100.7	135.9	143.1

Table.2 Comparison of frequency parameters for isotropic, thin, fully clamped sectorial plates with lineary and parabolically varying thickness in the circumferential direction: $h_1/h_0 = 0.5$, $\phi = 60^\circ$, $R_0/R_i = 5.0$ and $B/h_0 = 100$.

Variation of thickness	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
Linearly varying thickness						
SEM	55.26	104.3	111.1	170.3	178.8	189.6
Kim et. al. [1]	55.26	104.2	111.1	169.5	177.6	189.5
Parabolically varying thickness						
SEM	60.46	115.6	122.6	189.7	198.8	209.8
Kim et. al. [1]	60.45	115.4	122.6	188.7	197.8	209.9

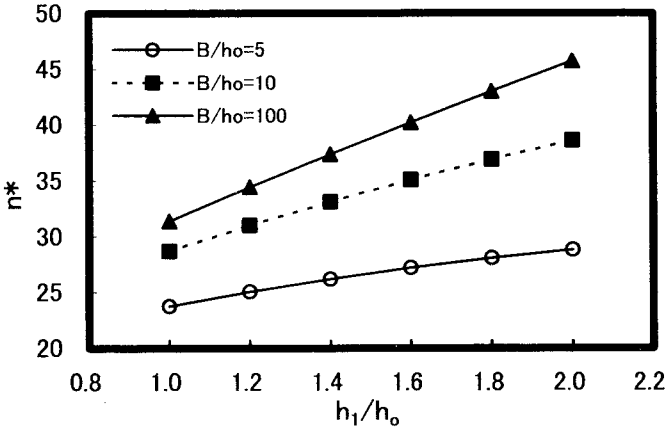


Fig.2 The effect of h_1/h_0 on the fundamental frequency parameter, n^* of annular sector plates tapered in the circumferential direction: $R_0/R_i = 2.0$, $\phi = 45^\circ$, CC-CC.