

有限フーリエ級数による内挿関数の差分法への応用

信州大学大学院

○後藤真吾

信州大学工学部

正会員

大上俊之

1. はじめに

差分的解法は取り扱いが簡便であることなどから、数値計算法の基本として古くより用いられてきた。しかしながら、差分法は曲線境界を持つような複雑な形状のモデルにおいては適合性があまり良くなく、その取り扱いについては多少の工夫を必要とする。

本研究では、解析対象の物体を有限フーリエ級数を用いた内挿関数によって表現し、座標変換することによって差分解析を行っている。具体的には、領域の形状を等間隔の長方形メッシュになるように座標変換を行うと共に、支配方程式についても変数変換を行って計算平面上において差分法を適用する。

2. 内挿関数式

いま、パラメータ t によって決まる関数を $u(t)$ 、内挿関数を $\Psi_j(t)$ とすると、 $j=0 \sim n$ の $n+1$ 個の u_j を通る近似関数 $u(t)$ は

$$u(t) = \sum_{j=0}^n \Psi_j(t) u_j \quad (1)$$

と表すことができる。ここにパラメータ t は $0 \leq t \leq n$ を満たす実数である。

本研究では内挿関数式として有限フーリエ級数を採用する。従って内挿関数の式形は 1 次元の場合、次式のように表される。

$$\Psi_0(t) = 1 - \frac{t}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \cot(\lambda_k/2) \cdot \sin(\lambda_k t) \quad \Psi_j(t) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin(\lambda_k j) \cdot \sin(\lambda_k t) \quad \Psi_n(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \Psi_k(t) \quad (2)$$

$$\lambda_k = \pi \frac{k}{n}, \quad \lambda_j = \pi \frac{j}{n}, \quad \lambda_t = \pi \frac{t}{n}$$

(2) 式を多次元に拡張するのは容易であり、例えば 2 次元空間はパラメータ ξ, η を導入すれば、空間内に与えられた $(n_1+1) \times (n_2+1)$ 個をとる平面 (x, y) は次式によって表すことができる。

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \Psi_i(\xi) \Psi_j(\eta) x_{ij}, \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \Psi_i(\xi) \Psi_j(\eta) y_{ij} \quad (3)$$

ここに、 $x_{ij} = x(i, j)$ であり、 y_{ij} についても同様である。なお、 t_1, t_2 はそれぞれ、 $0 \leq \xi \leq n_1$, $0 \leq \eta \leq n_2$ を満たす実数である。本研究では境界上の節点の座標のみを入力データとし、その他の内部節点は境界節点の値から計算によって求めた。

3. 微分変換式

パラメータ (ξ, η) の計算平面上において支配微分方程式を解くために、 (x, y) から (ξ, η) への変数変換が必要となるが微分変換式は式 (4) のようになる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad [A]^{-1} = \frac{1}{J_0} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} = [B_1]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \end{bmatrix} - [B_1]^{-1} [B_2] [A]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad [B_1]^{-1} = \frac{1}{J_0^2} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 & -2\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 \\ -\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} & -\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & -2\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 \end{bmatrix} \quad [B_2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \end{bmatrix}$$

以下、同様に 3 階微分、4 階微分についても微分変換マトリクスを求めることができる。

4. 計算例

(1) 楕円形断面のねじり定数の計算

最初に簡単な計算例として、短径が 1cm、長径が 2cm となる楕円形断面のねじり定数を算定する。

ここで、一様な楕円形断面がねじりをうけているものとする。応力関数 F の式は変数変換すると (5) 式で表すことができる。

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = E_1 \frac{\partial F}{\partial \xi^2} + E_2 \frac{\partial F}{\partial \xi \partial \eta} + E_3 \frac{\partial F}{\partial \eta^2} + E_4 \frac{\partial F}{\partial \xi} + E_5 \frac{\partial F}{\partial \eta} = -2 \tag{5}$$

なお、係数 $E_1 \sim E_5$ は式 (3) によって表されているとおり $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$ の ξ, η による 1 階および 2 階微分である。

これで得られた応力関数 F を用いて式 (6) でねじり定数 J を計算すると、図 1 のような結果が得られる。

$$J = 2 \iint_R F dx dy \tag{6}$$

分割数	4	10	20	30
計算値	5.3127	5.0663	5.0385	5.0309
正解値	5.0265			

(6)

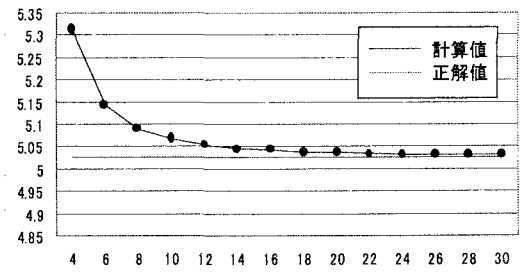


図1：ねじり定数の計算結果

(2) 円形膜の固有値問題

次に円形膜の固有振動について述べることにする。波の問題を解くにあたっては *Hermhorz* 波動方程式を解けばよい。この式は応力関数の式と同じく 2 階の微分方程式で表されているため同様の方法にて解を得ることができる。

図 2 は総分割数 20 とした時の固有ベクトルの図である。円形膜の 1 次固有値の解が 5.783231 であることから、こちらでも精度の良い解が得られたこととなる。

5. まとめ

本文では有限フーリエ級数形内挿関数を用いて 2 次元問題を内挿し、長方形格子に座標変換することによって、差分法を適用して数値解析を行う方法を試みた。ねじり定数の算定と固有値の解析を試みたが精度良く妥当な結果が得られた。これは有限フーリエ級数形内挿関数が曲線境界を内挿するのに適しているといえる。

本文の方法では境界上の節点の座標値を入力するのみで物体内部の内挿が行えるので、格子形成の方法としても有用であると思われる。

また、計算によって求め

られた内部の内挿点はそれぞれの内挿式が交差さえしなければ物体内部のどの場所にあっても内挿が可能である。したがって、図 3 のような物体の内挿も可能となり、L 型格子の形成も容易に行うことができる。

参考文献

- 1) 草間孝志・大上俊之：有限フーリエ級数を用いた内挿関数の改良：土木学会論文集 No.446/I-19, pp.167 ~ 175, 1990
- 2) 後藤真吾：一般曲線座標系による曲線境界をもつ 2 次元弾性問題の解析：信州大学卒業論文 1991
- 3) S.P.チモシェンコ：板とシェルの理論，ブレイン図書, 1973

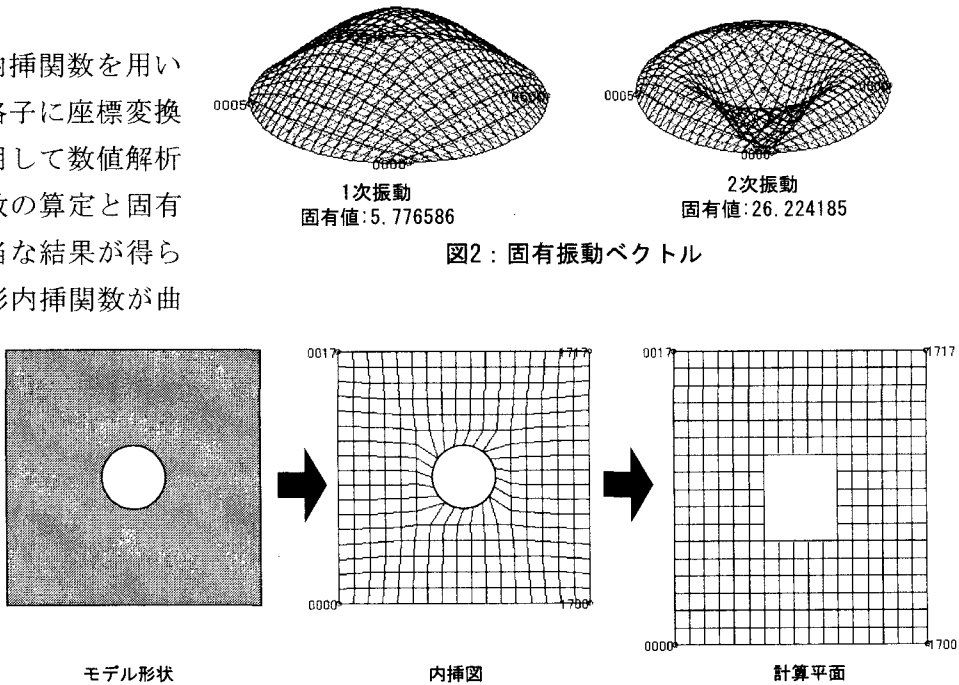


図2：固有振動ベクトル

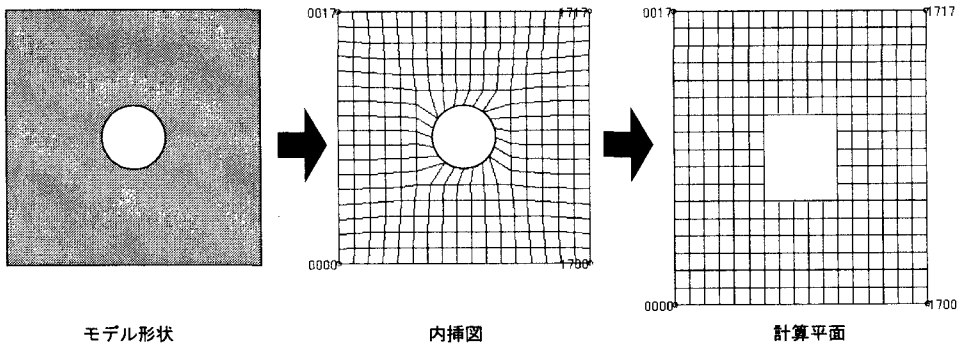


図3：L型格子内挿図