

2次元クラック先端部のエネルギー開放率の解析的検討析

岐阜大学大学院
岐阜大学助教授
岐阜大学教授

國富 康志
藤井 康寿
中川 建治

1.はじめに

本研究は、図-1 の様な中心（y 軸上）に直線状のクラックを持つ無限板が、一様引張りを受ける場合のエネルギー開放率 J を検討したものである。適用した応力関数は、著者等の提案による重み積分法で Westergaad の解を平滑化してプロセスゾーンを構成するように改良された 2 種類の関数である。著者等の従来の研究では、応力分布や変位に着目してその妥当性を示しているが、 J を検討していない。

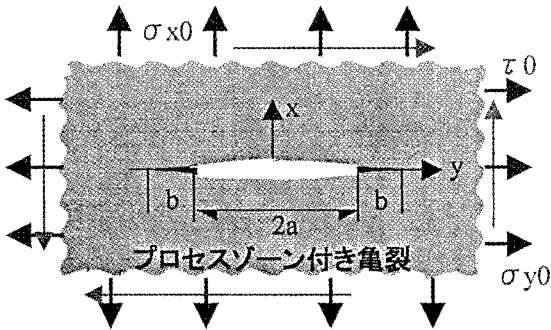


図-1 解析モデル

- 1) 第 1 の解は、Westergaad の解の特異点（クラック先端の応力急変化点）を平滑化する手法として、直接重み積分法を施したものである。重み $\rho_j(t)$ は 4 次あるいは 6 次の代数関数とする。すなわち、クラックの長さを表すパラメータ a を積分変数 t として応力関数 $W(z, t = a)$ に適当な重み $\rho_j(t)$ を乗じて区間 $(a \leq t \leq a + b)$ で積分する手法を適用するものである。
- 2) 第 2 の解を構成するには、Westergaad の解の特異項を次に示すように $\cosh(h(z, t))$ という関数形に変換した後に、 $h(z, t)$ 関数のみを重み関数 $\rho_j(t)$ で平滑化して $H(z, a, b)$ とする。然る後に、 $\cosh(h(z, t))$ の代わりに $Z^k \cosh(H(z, a, b))$ あるいは $Z^k \sinh(H(z, a, b))$ という項で応力関数を構成するのである。

$$\begin{cases} W(z, a, b) = \int_a^{a+b} W(z, t = a) \rho(t) dt \cdots \cdots (1) \\ H(z, a, b) = \int_a^{a+b} h(z, t = a) \rho(t) dt \cdots \cdots (2) \end{cases}$$
$$\begin{cases} W(z, t) = \frac{z}{\sqrt{z^2 + t^2}} \\ h(z, t) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{z + it}{z - it} \right) \end{cases}$$

2.解析例

第 1 の解は界面クラック問題の応力関数には適用不可能な限られたものであるが、一様板のクラックの解としては有効で、 J 積分も容易に得られる。単独な関数による J 値と、完全開口部の長さ $2a$ を等しくしてプロセスゾーン長さ b のみを夫々異なる値とする同種類の解を 6～8 個重ね合わせて最小自乗法で応力分布が最も滑らかになるように未定係数を決定した解で J 値を計算して表に示す。

第 2 の解は界面クラック問題の応力関数にも適用可能な広い解であるが、単独の解ではクラック先端の応力集中は正負に符号反転を生じて不自然である。従って第 1 の解のように長さ b を異にする同種の解、あるいは重み関数の次数の異なるもの幾つか（線形独立の解）を重ねて最小自乗法で応力分布の平滑化を図った。

- 1) 計算例－1 式(1)で、プロセスゾーン b を変えて、8 種類の結果を組み合わせる最適化を行い図に示す。
- 解析用データは、ヤング係数: $E = 2.1 \times 10^5$ Mpa、ポアソン比:0.167、亀裂の長さ: $2a = 2$ cm。

プロセスゾーン b	B=0.28~0.3 で、適当に 8 つ組み合わせる							
重み関数	6	6	6	6	4	4	4	4

- 2) 計算例－2 式(2)を用いて、プロセスゾーンを計算例－1 に合わせ重み関数を変えて、8 種類の結果を組み合わせる最適化を行い図に示す。

解析用データは、ヤング係数: $E = 2.1 \times 10^5$ Mpa、ポアソン比:0.167、亀裂の長さ: $2a = 2$ cm。

プロセスゾーン b	計算例－1 と同じものにする。							
重み関数	2,4,6 で、適当に 8 つ組み合わせる							



図-2 単独(重み変化)

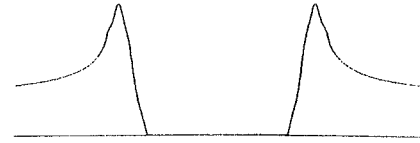


図-3 単独(b を変化)

図-4 組み合わせの場合

3) 計算例—3 それに対して計算例—3 では、亀裂の長さやプロセスゾーン b を一定値として、関数 $H(z, a, b)$ を β 倍 ($\beta = 1, 3, 5, 7,$) して線形独立な応力関数を構成する工夫を施し、同様な最小自乗法で平滑化することで結果を導いた。この提案は新しい手法であるから以下に簡潔に言及する。

式(2)を y 軸近傍 ($x = \pm \varepsilon$) で切断すると、次のようになる (図-4 参照)。

$$\text{Im}[H(\varepsilon \pm i y)] = \begin{cases} 0 & , |y| > a + b \quad (\text{連続部}) \dots\dots (3) \\ \pm i \pi/2 & , |y| < a \quad (\text{開口部}) \end{cases} \quad \text{なので}$$

$$H(z, a, b) = \text{Re}[H] + \text{Im}[H] = H_R + H_I = \begin{cases} H_R & , |y| > a + b \\ H_R \pm i \pi/2 & , |y| < a \end{cases} \quad \dots (4)$$

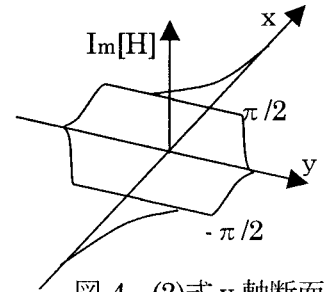


図-4 (2)式 y 軸断面

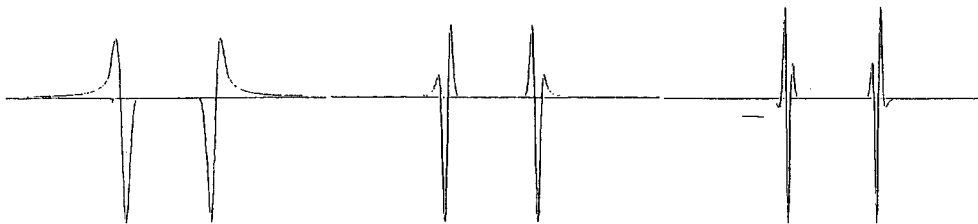
ここで、 $H(z, a, b)$ を β 倍すると、応力関数は次の様になる。

$$\cosh[\beta H] = \begin{cases} \cosh[\beta H_R] & , |y| > a + b \\ \cosh[\beta H_R \pm i \beta \pi/2] = \cosh \beta H_R \cosh \beta \pi/2 \mp i \sinh \beta H_R \sinh \beta \pi/2 & , |y| < a \end{cases} \quad \dots (5)$$

応力は実数部の値を採るので、開口部では応力が 0 と成るには $|y| < a$ の式は虚数となれば良い。その条件を満足する為には、 $\cosh(\beta \pi/2) = 0$ となれば良いので、 $\beta = 1, 3, 5, \dots$ と奇数であれば満足される。次にプロセスゾーン ($a < |y| < a + b$) では $H(z, a, b) = H_R + i H_I$ となる。この範囲では、 H_R は符号が一定の滑らかな関数であるが、 H_I は式(3)からも分るように開口部で $i \beta \pi/2$ 、連続部で 0 という様に変化し、 β が 3 以上になると、プロセスゾーン内で符号反転の回数が増加する (応力関数中の $\sin \cos$ 関数の周期が $1/3$ 倍 $1/5$ 倍...となり、プロセスゾーンの応力の符号が激しく反転する)。

解析用データは、ヤング係数、ポアソン比、亀裂の長さは上と同じ。プロセスゾーン $b = 0.3$ で固定。

周期	1,3,5,7 で、適当に 8 つ組み合わせる
重み関数	2,4,6 で、適当に 8 つ組み合わせる



3.まとめ

図-5 単独の場合(周期を変化)

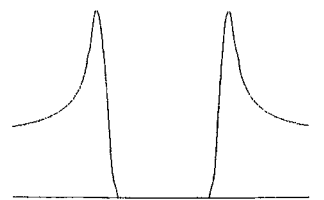


図-6 組み合わせの場合

計算例—1 は、プロセスゾーンの長さの異なるものを重ねているが、重なる部分の長さを 0.3 としている。計算例—2・3 は、プロセスゾーン又は周期の小さい値に 2 や 4 の重みを加え、大きい値に 4 や 6 の重みを加えると応力分布が滑らかな物になる。エネルギー開放率は計算例—2・1・3 の順に大きくなった。

計算例—2・3 はプロセスゾーンにおいて、単独の場合符号の反転が起こるが組み合わせた時は滑らかな結果が出た。この事から組み合わせた結果

がより現実的な解である事が分かる。そこで、単独でも応力分布が滑らかな物となる計算例—1 の J 値を、単独と組み合わせで比較すると後者の方が小さい値を示した。これは、最小のエネルギーでクラックが進展すると考えられる。

【参考文献】1)段,兒嶋,中川:亀裂先端部分で有限な応力集中を与える応力関数(土木学会論文集/No374, I - 6, 1986, P399~407) 2)村瀬,中川:円形境界で接合する異質弾性体の未接合領域近傍の応力分布解析(土木学会論文集/No483, I - 26, 1994, P41~49) 3)DUAN, FUJII, NAKAGAWA: FINITE STRESS CONCENTRATIONS AND J-INTEGRALS FROM NORMAL LOADS ON A PENNY-