2ＶＮＭＥ分布の理論式の提案

信州大学工学部　正会員　寒川典昭
信州大学大学院　　　○増田俊宏
信州大学工学部　　　　加藤将道

1. はじめに

従来我々は，1 変数非定常最大エントロピー分布（1-Variable Nonstationary Maximum Entoropy 分布（1VNME 分布））を検討してきた [1),2),3)]．しかしながら，この 1VNME 分布では，合流点の治水問題や流域間導水の問題について議論する場合には適応することが出来ないため，2 変数非定常最大エントロピー分布（2-Variable Nonstationary Maximum Entoropy 分布（2VNME 分布））が必要である．

そこで本稿では，1VNME 分布を 2VNME 分布に拡張した理論式を提案するものである．実データへの適用はまだ行っていないが，これは今後に課題としたい．

2. 理論式

2.1　分布形の導出法

時間 t に依存した確率変数を x(t),y(t)とし，その確率密度関数を p(x(t),y(t))とするとエントロピー H は次式で表される．

$$H = -\iint p(x(t))\, ln\, p(x(t)y(t))\, dx(t)dy(t) \tag{1}$$

ここで，確率密度関数が具備すべき条件と，任意関数 $g_r(x(t),y(t))$の期待値は次のように表される．

$$\iint p(x(t),y(t))\, dx(t)dy(t) = 1 \tag{2}$$

$$\iint g_r(x(t),y(t))\, p(x(t),y(t))\, dx(t)dy(t) = \mathrm{E}\left[g_r(x(t),y(t))\right] \qquad r = 1,2,\ldots,N \tag{3}$$

(2)，(3)式を制約条件として，(1)式を最大にする分布を求める．この分布は水文量から得られる情報は $g_r(\cdot)$の期待値の形で取り入れ，それ以外はエントロピー，すなわち不確定さを最大にする分布である．そのため対象統計量に，最大エントロピー分布を用いることは適切である．そこで上述の問題をラグランジュの未定乗数法で解く．ここで，ラグランジュ関数は

$$L = H + (\lambda_0(t) - 1)\left\{1 - \iint p(x(t),y(t))\, dx(t)dy(t)\right\} + \sum_{r=1}^{N} \lambda_r(t) \left\{\mathrm{E}\left[g_r(x(t),y(t))\right] - \iint g_r(x(t),y))\, p(x(t),y(t))\, dx(t)dy(t)\right\} \tag{4}$$

となる．ここに，$\lambda_r(t)$（r=1,2,...,N）はラグランジュ乗数である．そこで，(4)式の変分をとって"0"と置くと 2VNME 分布は次式のように求まる．

$$p(x(t),y(t)) = exp\left\{-\lambda_0(t) - \sum_{r=1}^{N} \lambda_r(t)\, g_r(x(t),y(t))\right\} \tag{5}$$

2.2 パラメータ同定法

(5)式を(2)式に代入して，λ_0に関して解くと次式が得られる．

$$\lambda_0 = ln\left\{\iint exp\left[-\sum_{r=1}^{N} \lambda_r(t)\, g_r(x(t),y(t))\right]\right\} dx(t)dy(t) \tag{6}$$

(3)式の右辺を$\nu_r(t)$と置いて，(5)式を(3)式に代入して(6)式を用いて整理すると次式となる．

$$\iint g_r(x(t),y(t))\, exp\left\{-\sum_{r=1}^{N} \lambda_r(t)\, g_r(x(t),y(t))\right\} dx(t)dy(t) = \nu_r(t) \iint exp\left\{-\sum_{r=1}^{N} \lambda_r(t)\, g_r(x(t),y(t))\right\} dx(t)dy(t) \tag{7}$$

$$r = 1,2,\ldots,N$$

いま、$\lambda_r(t)$の近似値を$\alpha_r(t)$，残差を$\varepsilon_r(t)$と置くと

$$\lambda_r(t)=\alpha_r(t)+\varepsilon_r(t) \tag{8}$$

となる．そこで，(8)式を(7)式に代入すると

$$\iint g_r(x(t),y(t))\,exp\left[-\sum_{r=1}^{N}(\alpha_r(t)+\varepsilon_r(t))\,g_r(x(t),y(t))\right]dx(t)dy(t)=\nu_r(t)\iint exp\left[-\sum_{r=1}^{N}(\alpha_r(t)+\varepsilon_r(t))\ g_r(x(t),y(t))\right]dx(t)dy(t) \tag{9}$$

$r=1,2,\ldots,N$

が得られる．(9)式を変形すると

$$\iint g_r(x(t),y(t))\,exp\left[-\sum_{r=1}^{N}\alpha_r(t)\,g_r(x(t),y(t))\right]exp\left[-\sum_{r=1}^{N}\varepsilon_r(t)\,g_r(x(t),y(t))\right]dx(t)dy(t)$$

$$=\nu_r(t)\iint exp\left[-\sum_{r=1}^{N}\alpha_r(t)\,g_r(x(t),y(t))\right]exp\left[-\sum_{r=1}^{N}\varepsilon_r(t)\,g_r(x(t),y(t))\right]dx(t)dy(t) \tag{10}$$

$r=1,2,\ldots,N$

が得られる．ここで，$\varepsilon_r(t)$は微少であるから，$\varepsilon_r(t)$に関してテーラー展開し，$\varepsilon_r(t)^2$ 以上の項を無視すると，(10)式より

$$\iint g_i(x(t),y(t))\,exp\left[-\sum_{r=1}^{N}\alpha_r(t)\,g_r(x(t),y(t))\right]\left[1-\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j(t)\,g_j(x(t),y(t))\right]dx(t)dy(t)$$

$$=\nu_i(t)\iint exp\left[-\sum_{r=1}^{N}\alpha_r(t)\,g_r(x(t),y(t))\right]\left[1-\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j(t)\,g_j(x(t),y(t))\right]dx(t)dy(t) \tag{11}$$

$i=1,2,\ldots,N$

が得られる．従って，(11)式を整理すると，次の$\varepsilon_r(t)$に関するN元連立一次方程式が得られる．

$$\sum_{j=1}^{N}(A_{i,j}(t)-\nu_i(t)\,A_{0,j}(t))\,\varepsilon_j(t)=A_{i,0}(t)-\nu_i(t)\,A_{0,0}(t) \tag{12}$$

$i=1,2,\ldots,N$

ここで，

$$A_{i,j}(t)=\iint g_i(x(t),y(t))\,g_j(x(t),y(t))\,exp\left[-\sum_{r=1}^{N}\alpha_r(t)\,g_r(x(t),y(t))\right]dx(t)dy(t) \tag{13}$$

$$g_0(x(t))=1 \tag{14}$$

としている．

3．あとがき

本稿では，非定常な1変数最大エントロピー分布を2変数最大エントロピー分布に拡張した分布形を導出し，その分布のパラメータ同定法を示した．しかしながら，導出した分布形の有効性については，まだ検討していない．今後は，実データへの適用をはかり，最適な任意関数 $g_r(x(t),y(t))$を見つけていき，これらの分布の有効性を検討したいと考えている．

【参考文献】

1）寒川：非定常な1変数最大エントロピー分布の提案，土木学会中部支部研究発表会講演概要集，II-38，pp.249-250，1998年.

2）寒川，西，栖：非定常な1変数ME分布を用いた降水量の頻度分析，土木学会中部支部研究発表会講演概要集，II-59，pp.253-254，1999年.

3）寒川，西，栖：1変数ME分布による月降水量の非定常頻度分析，土木学会第54回年学術講演会講演概要集，第2部，II-314，pp.630-631，1999年.