

Differential Quadrature 法を用いた扇形板の振動解析

大同工業大学 ○近藤八重

大同工業大学 正員 水澤 富作

1. はじめに 1971年に Bellman¹⁾により提案された Differential Quadrature 法 (DQM) は、偏微分方程式を数値的に解く解法として、多くの分野で用いられている²⁾。構造解析への適用は、比較的新しく、1988年の Bert らの研究³⁾が挙げられる。DQMは、梁や板などの基礎方程式を境界条件を満たすように数値的に解く一手法である。DQMは、変位関数の導関数を領域に設けた全ての離散点での関数値の重み付き線形和として表される数値補間多項式により近似し、支配方程式を線形代数方程式に置き換える手法である。本文では、Lagrange 多項式を補間関数に用いたDQMの扇形板の振動解析への適用について検討を行っている。また、本手法の収束性や解析精度について示す。

2. 式の定式化 図-1に示すように、半径方向の2つの直線辺が単純支持された扇形板の自由振動方程式は、Levy 法を用いると、次に示す常微分方程式で与えられる。ここで、式の定式化には、無次元極座標系を用いる。

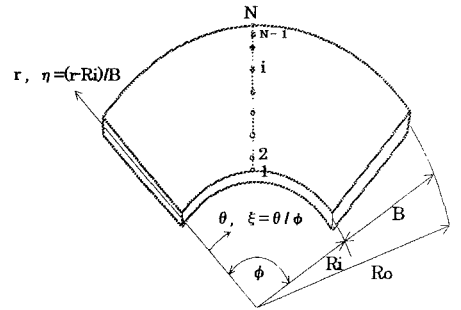


図-1 扇形板と極座標系

$$\xi = \theta / \phi, \quad \eta = (r - R_i) / B, \quad W' = W / B \quad (1)$$

ただし、W はたわみであり、 $B = R_i(\lambda - 1)$ は板幅、 $\lambda = R_o / R_i$ は半径比、 ϕ は中心角、r は半径であり、また R_i と R_o はそれぞれ扇形板の内径と外径を示す。一様厚さの扇形薄板の自由振動方程式は、

$$\frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \frac{2}{rB^3} \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} + \frac{1}{B^4} \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - \frac{2}{r^3 B \phi^2} \frac{\partial^3 W}{\partial \eta \partial \xi^2} - \frac{1}{r^2 B^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r^3 B} \frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{2}{r^2 B^2 \phi^2} \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} + \frac{4}{r^4 \phi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = \frac{\rho h}{D} \omega^2 W \quad (2)$$

で表される。ここで、 $D = Eh^3 / \{12(1 - \nu^2)\}$ である。半径方向の直線辺で相対する2辺を単純支持と仮定すると、たわみは、次式で仮定される。

$$W(\xi, \eta) = \sum Y(\eta) \sin(m\pi \xi); \quad m = 1, 2, \dots, \infty \quad (3)$$

したがって、式(3)を式(2)に代入すると、次式の常微分方程式が得られる。

$$\frac{1}{R^4} \frac{(m\pi)^4}{\phi^4} Y(\eta) + \frac{2}{R} \frac{d^3 Y(\eta)}{d\eta^3} + \frac{d^4 Y(\eta)}{d\eta^4} - \frac{2}{R^3 \phi^2} \frac{d^3 Y(\eta)}{d\eta} - \frac{1}{R^2} \frac{d^2 Y(\eta)}{d\eta^2} + \frac{1}{R^3} \frac{d Y(\eta)}{d\eta} - \frac{2}{R^2 \phi^2} \frac{d^2 Y(\eta)}{d\eta^2} - \frac{4(m\pi)^2}{R^4 \phi^2} Y(\eta) = \frac{\rho h \omega^2 B^4}{D} Y(\eta) \quad (4)$$

ここで、 $R = (R_o + R_i) / 2$ 、 ρ は密度、h は板厚、 ω は円振動数である。

DQMでは、次式で表される $Y(\eta)$ の離散点 i での (r) 次の導関数は、解析領域に設けた全ての離散点での関数値の重み付き線形和で表される。 $d^{(r)} Y(\eta) / d\eta^r = \sum_{j=1}^N A^{(r)}_{ij} Y_j$; $j = 1, 2, \dots, N$ (5) ここで、 $A^{(r)}_{ij}$ は r 次の重み係数であり、 $Y_j = Y(\eta_j)$ 、 N は η 軸方向に設けられた離散点の数である。また、Lagrange 補間多項式 $\Pi(\eta)$ を用いれば、(1)次の重み係数は、

$$A^{(1)}_{ik} = \Pi(\eta_i) / (\eta_i - \eta_k) \Pi'(\eta_k); \quad k \neq i, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

$$\text{ただし、} \quad \Pi(\eta_i) = \prod_{v=1, v \neq i}^N (\eta_i - \eta_v), \quad \Pi'(\eta_k) = \prod_{v=1, v \neq k}^N (\eta_k - \eta_v) \quad (7)$$

で与えられる。重み係数の r 次の導関数は、Shu ら³⁾により提案された漸化式を用いれば、式(6)で求めた $A^{(1)}_{ik}$ より、次式で表される。

$$\text{すなわち、} 2 \leq r \leq (N-1) \text{ に対して、} A^{(r)}_{ii} = r [A^{(r-1)}_{ii} A^{(1)}_{ik} - A^{(r-1)}_{ik} / (\eta_i - \eta_k)]; \quad k \neq i, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$A^{(r)}_{ij} = - \sum_{v=1, v \neq i}^N \left[A^{(r)}_{iv} \right]; \quad i = 1, 2, \dots, N. \text{ ただし、} 1 \leq r \leq (N-1) \quad (8)$$

式(5)~式(8)の Differential Quadrature の関係式を用いて、式(4)を書き換えると、内部離散点 $(N-4)$ で次の

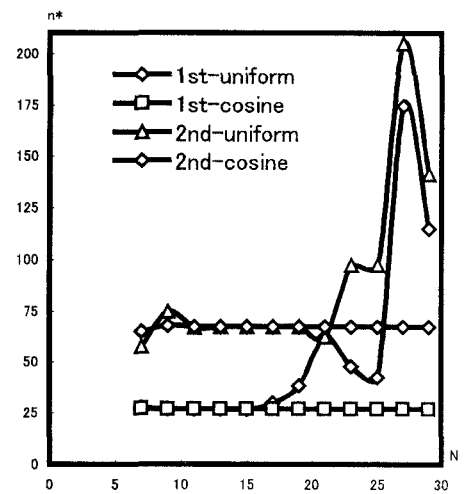


図-2 DQMの収束性に与える分割パターンの影響; $R_o/R_i=2.0, SS-CC, \phi=45^\circ, \nu=0.3$

$$\frac{(m\pi)^4}{R^4\phi^4}Y_i - \frac{2}{R}\sum_{j=1}^NA^{(3)}_{ij}Y_j + \sum_{j=1}^NA^{(4)}_{ij}Y_j - \frac{2(m\pi)^2}{R^3\phi^2}\sum_{j=1}^NA^{(1)}_{ij}Y_j - \frac{1}{R^2}\sum_{j=1}^NA^{(2)}_{ij}Y_j + \frac{1}{R^3}\sum_{j=1}^NA^{(0)}_{ij}Y_j - \frac{2(m\pi)^2}{R^2\phi^2}\sum_{j=1}^NA^{(2)}_{ij}Y_j - \frac{4}{R^2\phi^2}Y_i = \frac{\rho h\omega^2B^4}{D}Y_i \quad ; i=3,4,...,(N-2) \quad (9)$$

係式が求められる。次に、2つの円弧辺で導入される境界条件は、(a) 固定辺は、 $W=0, \partial W/\partial \eta=0$ で与えられ、単純支持辺は、 $W=0, M\eta=0$ になる。また、(c) 自由辺は、 $M\eta=0, Q\eta=0$ で求められる。したがって、式(9)と与えられた境界条件式を行列表示すれば、次式の線形代数方程式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} [K_{bb}] & [K_{db}] \\ [K_{db}] & [K_{dd}] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Y_b\} \\ \{Y_d\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ n*2\{Y_d\} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ただし、 $\{Y_b\}=\{Y_1, Y_2, Y_N, Y_{N-1}\}, \{Y_d\}=\{Y_3, Y_4, ..., Y_{N-2}\}$ $n*=\omega B^2\sqrt{\rho h}/D$ は振動数パラメータである。また、式(6)を変形すると、次の固有方程式が導ける。

$$[[K_{dd}] - [K_{db}][K_{bb}]^{-1}[K_{bd}]] \{Y_d\} = [K] \{Y_d\} = n*^2 [I] \{Y_d\} \quad (11)$$

ここで、 $[I]$ は $(N-4) \times (N-4)$ の大きさの単位行列であり、また $[K]$ は、実非対称行列になる。

3. 値計算例および考察 計算例として、相対する2の円弧辺が任意の境界条件を持つ扇形板の振動解析を示す。図-2には、円弧辺が固定された扇形板 ($Ro/Ri=2.0, \phi=45^\circ$) の振動数パラメータ、 $n*=\omega B^2\sqrt{\rho h}/D$ の収束性に与える離散点の数, N と分割パターンの影響が示してある。ここで、不等分割は、Cosine 分割を用いている。これより、不等分割を用いれば、離散点の増大に対しても安定した収束性が得られる。表-1は、扇形板の振動数パラメータの精度比較を示している。ここで、半径比, Ro/Ri は 2.0 と 4.0 に仮定し、 N は 17 に仮定している。比較のために、Spline 帯板法による解⁴⁾と Kim らの Ritz 法による結果⁵⁾も示してある。これより、境界条件や半径比に関係なく、非常に良く一致した結果が得られている。また、表-2 は、扇形板の半径方向のモード次数に対応する振動数パラメータに与える中心角の影響が示してある。また、Bessel 関数を用いた解析解⁶⁾と比較してみたが、非常に大きな中心角を持つ場合に対しても安定した解が得られ、1%以内の精度で一致した結果が得られた。

4. あとがき 得られた結果をまとめると、次のようになる。 1) Lagrange 多項式を補間関数に用いたDQMでは、不等分割パターンを用いると解の収束性が著しく改善される。 2) DQM を用いれば、少ない未知数で精度の高い結果が得られる。

参考文献 1) Bellman, R.E. et al.: J. Math. Anal. Appl., **34**, 235-238, 1971. 2) Bert, C.W. et al.: AMR, **49**, 1-28, 1996. 3) Shu, C. et. al.: Int. J. Num. Meth. Fluids, **15**, 791-798, 1992. 4) 水澤: 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, **15**, 355-360, 1991. 5) Kim, C.S. et. al.: JSV, **134**, 407-421, 1989 6) McGee, O.G. et al.: Int. J. Mech. Sci., **37**, 537-566, 1995.

表-1 扇形板の振動数パラメータ, $n*$ の精度比較; $\phi=45^\circ, N=17$

境界条件	Ro/Ri	1st	2nd	3rd	4th	5th
SS-CC	2.0	26.892	44.704	67.373	76.461	86.615
	SSM	26.892	44.704	67.373	76.461	86.616
	RRM	26.893	44.705	67.393	76.460	86.615
	4.0	40.209	84.789	94.641	146.63	158.83
	SSM	40.209	84.789	94.641	146.64	158.83
SS-SF	2.0	5.6969	20.448	23.702	44.033	46.938
	SSM	5.6969	20.448	23.702	44.033	46.938
	4.0	12.291	41.666	45.958	82.631	99.071
	SSM	12.290	41.673	45.959	82.629	99.070
SS-FF	2.0	5.6969	20.448	23.702	44.033	46.938
	SSM	5.6969	20.448	23.702	44.033	46.938
	4.0	12.291	41.666	45.958	82.631	99.071
	SSM	12.290	41.673	45.959	82.629	99.070

SSM=spline 帯板法による解⁴⁾ RRM=Rayleigh-Ritz 法による解⁵⁾

表-2 扇形板の振動数パラメータに与える中心角の影響; $Ro/Ri=2.0$

境界条件	中心角	1st	2nd	3rd	4th	5th
SS-CC	30	135.60	300.43	541.25	859.62	1256.0
	90	23.330	62.933	122.37	201.41	300.10
	150	90.670	248.36	485.47	801.39	1196.0
	210	89.968	247.37	484.37	800.22	1194.3
	270	89.683	246.36	483.92	799.74	1194.3
SS-FF	30	47.037	115.49	202.05	353.96	584.68
	90	4.2725	31.112	107.51	262.14	497.57
	150	0.6726	19.728	97.978	254.02	490.29
	210	0.3236	15.454	95.558	251.75	488.28
	270	0.6113	13.327	94.082	250.82	487.45
SS-CF	30	48.693	146.41	308.08	546.60	864.80
	90	14.695	91.740	250.68	487.69	804.62
	150	13.452	87.445	246.20	483.04	799.85
	210	13.206	86.264	244.97	481.76	798.53
	270	13.123	85.778	244.47	481.23	797.99
SS-FC	30	107.96	195.11	347.77	579.88	893.20
	90	32.098	107.49	263.56	499.34	815.52
	150	23.692	98.902	256.31	492.70	809.20
	210	20.950	96.444	254.30	490.86	807.46
	270	19.735	95.803	253.47	490.10	806.74