Differential Quadrature 法を適用した梁の曲げ解析

大同工業大学　正員 ○水澤 富作
大同工業大学　中村憲吉　大同工業大学　近藤八重

1．はじめに　偏微分方程式の数値解析法として、差分法,有限要素法や境界要素法などが広く用いられている。Differential Quadrature 法（DQM）[1,2] も、境界条件を満たすように梁や板などの支配方程式を数値的に解く一手法である。DQM は、変位関数の導関数（微分係数）を領域に設けた全ての離散点での関数値の重み付き線形和として表される数値補間多項式により近似し、支配方程式を線形代数方程式に置き換える手法である。本文では、Lagrange 多項式を補間関数に用いたDQMの梁の曲げ解析への適用について検討を行い、本手法の収束性や解析精度に与える離散点の数と分割パターンの影響について述べている。

2．式の定式化

2.1　梁の基礎方程式　等分布荷重を受ける梁の基礎方程式を、無次元座標で示すと、次式で表される。

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} - \frac{m\omega^2 L^4}{EI}W = qL^4/EI \quad \cdots(1)$$

ただし、$\xi = x/L$,　$m = \rho A$、 Wはたわみ、EI は梁の曲げ剛性、L はスパン長、ω は円振動数である。また,振動数パラメータは、$n* = \omega L^2\sqrt{\rho A/EI}$ で定義する。

2.2　Differential　Quadrature 法による定式化　　DQMでは、次式で表されるY(ξ)の離散点 i での(r)次の導関数は、図－1 に示す解析領域に設けた全ての離散点での関数値の重み付き線形和で表される。

$$d^{(r)}W(\xi)/d\xi^r = \sum_{j=1}^{N} A^{(r)}_{ij}W_j \quad ; j,i=1,2,\ldots,N \qquad (2)$$

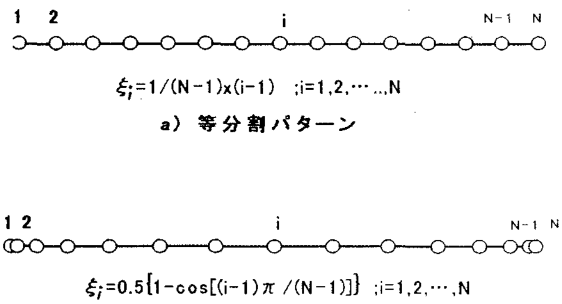
ここで、$A^{(r)}_{ij}$ は r 次の重み係数であり、$W_j=W(\xi_j)$、Nはξ軸方向に設けられた離散点の数である。梁に設ける離散点は、図-1 に示すように等分割と不等分割で与えられる。

1次の重み係数は、Lgrange 補間多項式$\Pi(\xi)$を用いれば、次式で与えられる。

$$A^{(1)}_{ik}=\Pi(\xi_i)/(\xi_i-\xi_k)\Pi(\xi_k);\ k\neq i、i,k=1,2,..,N \qquad (3)$$

ただし、

$$\Pi(\xi_i) = \prod_{v=1,v\neq i}^{N}(\xi_i-\xi_v)\ ,\ \Pi(\xi_k) = \prod_{v=1,v\neq k}^{N}(\xi_k-\xi_v) \quad (4)$$



b) 不等分割パターン

図－1　離散点の分割パターン

また、重み係数の r 次の導関数は、次式で与えられる漸化式を用いれば、式(3)で求めた$A^{(1)}_{ik}$より、次式で表される[3]。すなわち,$2\leq r\leq(N-1)$に対して、

$$A^{(r)}_{ij} = -\sum_{v=1,v\neq i}^{N}\left[A^{(r)}_{iv}\right] \quad k\neq i,\ i,k=1,2,..,N$$

$$A^{(r)}_{ii}= r\left[A^{(r-1)}_{ii}A^{(1)}_{ik}-A^{(r-1)}_{ik}/(\xi_i-\xi_k)\right] \quad ;i=1,2,..,N。ただし、1\leq r\leq(N-1) \qquad (5)$$

2.3　自由振動解析への適用　　式(2)～式(5)の Differential Quadrature の関係式を用いて、一径間梁の自由振動方程式を書き換えると、内部離散点(N-4)で次の関係式が求められる。

$$\sum_{j=1}^{N} A^{(4)}_{ij}W_j = \frac{\rho A\omega^2 L^4}{EI}W_i \quad ;\ i,j = 3,4,\cdots,(N-2) \qquad (6)$$

次に、導入される境界条件は、次式で表される。(a)　固定辺は、W=0,　dW/dξ=0 で与えられ、(b)　単純支持辺は、W=0 , Mξ=0 になる。また、(c)　自由辺は、Mξ=0、Qξ=0 で与えられる。したがって、式(9)と与えられた境界条件を行列表示すれば、次式の線形代数方程式が得られる。

$$\begin{Bmatrix}[Kbb] & [Kdb]\{Wb\} \\ [Kdb] & [Kdd]\{Wd\}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\{0\} \\ n_*^2\{Wd\}\end{Bmatrix} \qquad (7)$$

ただし、$\{W_b\}=\{W_1\ W_2\ W_N\ W_{N-1}\},\{W_d\}=\{W_3\ W_4\ ,..,W_{N-2}\}$,　$n^*=\omega L^2\sqrt{\rho A/EI}$ は振動数パラメータである。また、式(7)を変形すると、次の固有方程式が導ける。

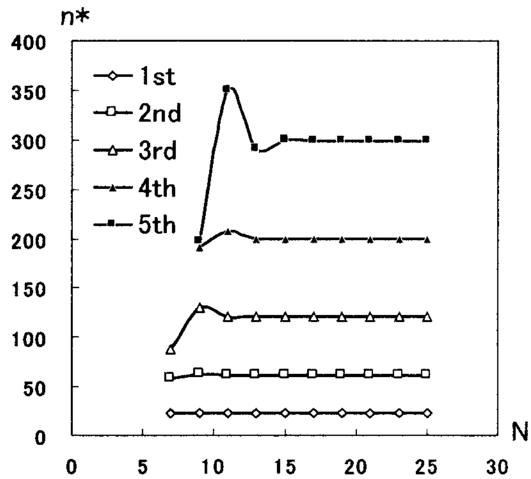
$$\left[\,[K_{dd}]-[K_{db}][K_{bb}]^{-1}[K_{bd}]\right]\{W_d\}=[K]\{W_d\}=n^{*2}[I]\{W_d\} \tag{8}$$

ここで、[I]は(N-4)x(N-4)の大きさの単位行列であり、また[K]は、実非対称行列になる。なお、集中荷重や中間支点を持つ梁では、各要素に分割して、要素間の連続条件を導入すればよい。

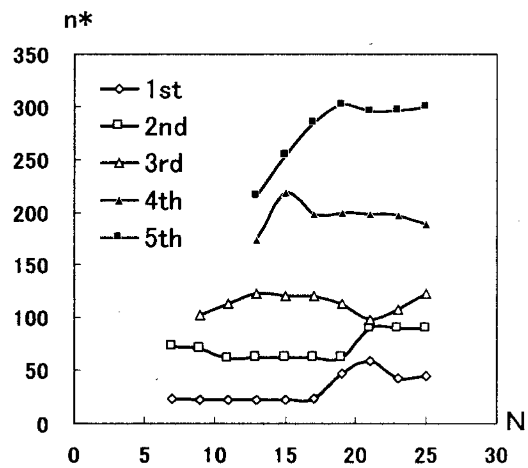
3．値計算例および考察

ここでは、梁の曲げ振動を例にとり、DQMで求めた解の収束性と解析精度に与える離散点の数と分割パターンの影響について述べる。ここで、梁に設ける離散点は、図-1 に示すように、等分割と不等分割で与えている。なお、分布荷重、集中荷重を受ける梁や連続梁の曲げ解析では、離散点の分割パターンに影響されず、少ない離散点で、厳密解が得られている。

図-2 は、両端固定梁の振動数ﾊﾟﾗﾒｰﾀ,$n^*=\omega L^2\sqrt{\rho A/EI}$ の収束性に与える離散点の数,N と分割パターンの影響が示してある。ここで、不等分割は、Cosine 分割である。これより、不等分割を用いると安定した収束性が得られる。また、表-1 は、種々の境界条件を持つ梁の精度比較を示している。ここで、離散点の数は 15 に仮定し、また等分割と不等分割の結果を、厳密解と比較している。これより、厳密解と比較して、1％以内の精度が得られているが,自由の境界条件を含む場合には、若干精度が悪い。



a) 不等分割パターン



b) 等分割パターン

図−2 両端固定梁の振動数ﾊﾟﾗﾒｰﾀの収束性に与える分割パターンと離散点の数の影響

表−1 梁の振動数パラメータの精度比較; N=15

境界条件	分割ﾊﾟﾀｰﾝ	1st	2nd	3rd	4th	5th
c−c	等分割	22.377	61670	120.77	218.58	253.59
	不等分割	22.373	61.673	120.90	199.94	299.39
	厳密解	22.373	61.673	120.90	199.86	298.56
s−c	等分割	15.397	49.970	104.21	196.46	223.89
	不等分割	15.418	49.965	104.25	178.46	273.11
	厳密解	15.421	49.971	104.24		
s−s	等分割	9.8731	39.478	88.777	166.86	222.30
	不等分割	9.8696	39.478	88.825	158.06	248.47
	厳密解	9.8696	39.478	88.826	157.91	246.74
c−f	等分割	1.2393	22.296	61.711	121.94	176.30
	不等分割	3.5160	22.034	61.700	120.98	197.46
	厳密解	3.5160	22.035	61.698		

4．あとがき

得られた結果をまとめると、次のようになる。 1) Lagrange 多項式を補間関数に用いたDQMは、従来のDQMと比較して、任意に離散点を仮定することができ、また境界条件の導入が容易である。 2）不等分割された離散点を用いると、収束性が安定し、高次の振動数まで一様な収束状態が得られる。 3）しかしながら、比較的高次の導関数を含む自由の境界条件を有する問題では、解の収束性と精度が少し悪い。

参考文献

1) Bellman, R.E. and Casti, J.:Differential quadrature and long-term integration.J. Math.Anal.Appl.,34,235-238, 1971. 2) Bert, C.W. and Malik, M.: Differential quadrature method in computational mechanics: A review.AMR, 49, 1-28, 1996. 3) 水澤：DQM を用いた長方形板の振動解析、土木学会年講、1999.