広帯域の波数の波動問題における高速多重極境界要素法

福井大学大学院　学生員　○　稲津 恭介
福井大学工学部　正会員　　福井 卓雄

1　はじめに

境界要素法に高速多重極法を適用した高速多重極境界要素法は, 大規模な波動問題を解析する手法として極めて有効な手段である。しかし, 波数の大きな問題においては多重極展開に必要な項数が大きくなり, 波数とともに計算量が増大する。これをおさえる方法として 2 つの方法が考えられる。1 つめは 高速 Fourier 変換 (FFT) を利用して, Fourier 像空間の中で係数の変換を行う方法であり [1], 2 つめは Fourier 像空間内での展開形式により境界要素法を高速化する方法である [2]。これら 2 つの解法の効率はほぼ同等であり, 精度的に前者のほうがより安定した数値解が得られる。波数が大きい場合の別の問題点として, 外部問題における仮想固有値の問題がある。ここでは, 高速多重極境界要素法に適合する方法として, Burton と Miller の方法 [3] を採用し問題を回避する。これらの手法を組み合わせた解法により, 広帯域の波数に対して有効な高速多重極境界要素法を構成することができた。また, 弾性波動問題においてもこの手法が適用でき, 計算の高速化を期待できる。

2　Burton と Miller による境界積分方程式

2 次元空間中の外部領域 B とその境界 ∂B を考え, この領域で Helmholtz 方程式の境界値問題

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad \text{in } B, \qquad u = \hat{u} \quad \text{on } \partial B_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = s \quad \text{on } \partial B_2 \tag{1}$$

を考える。ここに, u は波動場であり, k は波数である。また, $\partial/\partial n$ は外向き法線微分を示す。

Helmholtz 方程式の外部境界値問題を Green 公式により与えられた境界積分方程式を使って解く場合に現れる厄介な問題に仮想固有値の問題がある。この問題を回避するために Burton と Miller は, Green 公式により与えられた境界積分方程式とその法線勾配の積分方程式とを線形結合させた方程式

$$\begin{aligned} C(\boldsymbol{x})\left[u(\boldsymbol{x}) + \alpha\frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{x})\right] &= \left[\tilde{u}(\boldsymbol{x}) + \alpha\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}(\boldsymbol{x})\right] \\ &+ \int_{\partial B}\left[G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \alpha\tilde{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right]\frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{y})\,ds_y - \int_{\partial B}\left[S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \alpha U(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right]u(\boldsymbol{y})\,ds_y \end{aligned} \tag{2}$$

を境界積分方程式として使うことを提案した [3]。ここに, C は点 x の位置に依存する自由項で, $\tilde{u}$は入射波を表す。α は任意の複素数定数であり, $\Im[\alpha] \neq 0$ である。また, G, S は基本特異解および第 2 基本特異解であり, $\tilde{S}$, U は, それぞれ, G, S の法線勾配でつぎのように与えられる。

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|), \qquad S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial n_y}, \qquad \tilde{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial n_x}, \qquad U(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\partial S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial n_x} \tag{3}$$

ここに, $H_n^{(1)}$ は第 1 種 n-次の Hankel 関数である。

境界要素法では, $\boldsymbol{x}$ が境界上にあるときの (2) を未知の境界値に関する境界積分方程式として, これを離散化して解析する。

3　2 次元波動問題における高速多重極法

高速多重極アルゴリズムは, 場の多重極展開, 局所展開およびそれらの間の変換関係を用いて, 多数の波源相互の作用を高速に計算する方法であり, これを方程式の反復解法に応用して境界要素法を高速化する。

波動場 $u(\boldsymbol{x})$ の多重極展開および局所展開を

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{i}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n H_n^{(1)}(kr)e^{in\theta}, \quad u(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n J_n(kr)e^{-in\theta} \tag{4}$$

で表す。ここに, (r,θ) は展開点を中心とした極座標であり, J_n は n-次の Bessel 関数である。

多重極点の移動 (M2M), 多重極展開の局所展開への変換 (M2L), 局所展開点の移動 (L2L) による係数の変換関係は, それぞれ, 次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{M}_n &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_m J_{n-m}(k\rho)\, e^{-i(n-m)\phi} && \text{(M2M)} \\ L_n &= \frac{i}{4}\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m M_m H_{n+m}^{(1)}(k\rho)\, e^{i(n+m)\phi} && \text{(M2L)} \\ \tilde{L}_n &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} L_m J_{m-n}(k\rho)\, e^{-i(m-n)(\phi+\pi)} && \text{(L2L)} \end{aligned} \tag{5}$$

ここに, (ρ,ϕ) は新しい中心点から見た古い中心点の極座標であり, $\tilde{()}$ は新しい中心点における係数を表す。Bessel 関数 $J_n(kr)$ と Hankel 関数 $H_n^{(1)}(kr)$ を係数とする Fourier 級数を

$$j(kr,\xi) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr)e^{in\xi} = e^{ikr\sin\xi}, \quad h(kr,\xi) \sim \frac{i}{4}\sum_{n=-P}^{P} H_n^{(1)}(kr)e^{in\xi} \tag{6}$$

で定義する。関係 (5) の Fourier 級数を計算し, 上の関係を使って表現すれば, 変換関係

$$\begin{aligned} \tilde{M}(\xi) &= M(\xi)\, j(k\rho, \xi-\phi) && \text{(M2M)} \\ L(\xi) &= M(-\xi-\pi)\, h(k\rho, \xi+\phi) && \text{(M2L)} \\ \tilde{L}(\xi) &= L(\xi)\, j(k\rho, -\xi-\phi-\pi) && \text{(L2L)} \end{aligned} \tag{7}$$

が得られる。この表現を直接に用いた高速多重極法を構成することができるが [2], 関数 $h(kr,\xi)$ が本来発散級数であるため, これを適切な精度で計算することが困難なことがある。したがって, 展開の情報として M_n, L_n を用い, 変換 (7) を使うために, そのつど FFT を用いて $M_n \Rightarrow M(\xi) \Rightarrow M_n$ などの変換を行なって計算を進める方法 [1] が現在のところ有効である。

4 数値解の精度

波数が大きい問題の解析精度を確認するために, 硬い円形散乱体 (半径 a) による散乱問題の解析を行ない正解と比較した。入射波は x-軸方向に進行する平面波である。$ka = 100$ とし, 要素数 $N = 1024$ および 8192 のときの境界上の未知数の値と正解とを比較したものを右表 に示す。要素数が $N = 8192$ のときには良い精度の解が得られているが, $N = 1024$ のときには前方側の解の精度が落ちている。かなり細かい要素分割を行えば, 高い精度の解を得ることができる。弾性波動問題における高速多重極法の場合にも関係 (5) を用いて係数の変換を行うことができる。したがって, 高速に精度よく計算を進めることが期待される。

θ		$N = 1024$	$N = 8192$	Exact
0	$\mathrm{Re}[u]$	-0.01690	-0.02059	-0.02065
	$\Im[u]$	0.00654	0.00478	0.00475
	$\lvert u\rvert$	0.01812	0.02114	0.02119
$\pi/2$	$\mathrm{Re}[u]$	1.39924	1.39227	1.39216
	$\Im[u]$	-0.00939	-0.01245	-0.01247
	$\lvert u\rvert$	1.39927	1.39233	1.39222
π	$\mathrm{Re}[u]$	1.72925	1.72952	1.72952
	$\Im[u]$	1.00451	1.00402	1.00401
	$\lvert u\rvert$	1.99984	1.99983	1.99983

参考文献

[1] 福井卓雄, 勝本順三 : 高速 Fourier 変換を援用した高速多重極境界要素法による 2 次元散乱問題の解析, 境界要素法論文集, **15**, (1998), pp. 99–104.

[2] 福井卓雄, 勝本順三, 稲津恭介 : 波数の大きな波動問題の高速多重極境界要素法による解析, BEM ・テクノロジー ・コンファレンス論文集, **9**, (1999), pp. 79–84.

[3] Burton, A.J. and G.F. Miller : The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A. 323**, (1971), pp. 201–210.