高速多重極境界要素法による多層領域における動弾性問題の解析

福井大学工学部 ○ 近藤 喜彦
福井大学工学部 学生員 稲津 恭介
福井大学工学部 正会員 福井 卓雄

本報では, 著者らが開発した 2 次元動弾性問題の高速多重極境界要素法 [1] を多層領域の解析に適用する方法, とくに, 多層領域問題の境界要素方程式の反復性能を改善する方法について考察する。

2 次元動弾性問題の高速多重極境界要素法

弾性体は等方等質であると仮定する。領域 B およびその境界 ∂B における周波数領域問題を考える。境界値問題は次のようになる。

$$c_T^2 u_{i,jj} + (c_L^2 - c_T^2) u_{j,ji} + \omega^2 u_i + X_i = 0 \quad \text{in } B, \qquad u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \partial B_1, \qquad n_j \sigma_{ji} = \hat{s}_i \quad \text{on } \partial B_2 \tag{1}$$

ここに, u_i は変位, X_i は物体力, c_L, c_T は縦波および横波の速度であり, ω は与えられた角周波数である。

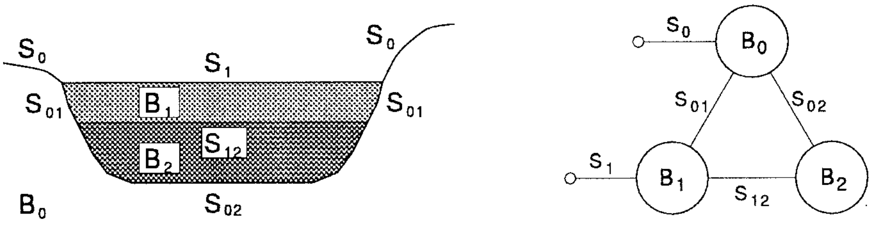
境界積分方程式は, Somigliana の公式から導かれ, それを離散化した方程式は

$$-\mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} \tag{2}$$

と書かれる。ここに, $\mathbf{u}$ は境界変位, $\mathbf{s}$ は境界応力ベクトル, $\tilde{\mathbf{u}}$ は入射波を表す。この式は, 境界条件が与えられるとき, 未知境界値についての代数方程式となる。高速多重極境界要素法は, (2) の行列ベクトル積を高速多重極法により計算し, 方程式を反復法で解いて, 境界要素解析を高速に実行する手法である。動弾性問題においては, Glerkin ベクトルを用いて, Helmholtz 方程式の高速多重極法を利用した解析を行なう。解析法の詳細については文献 [1] を参照されたい。いずれにしても, 高速多重極法では行列ベクトル積の計算を高速化することに主眼がおかれており, すべての計算を行列ベクトル積の形で実行しなければならない。

多層領域問題

図で示されるような多層領域の解析法について考えよう。基盤 B_0 の上に堆積層 B_1, B_2 が載っている。第 i 層の単独の境界を S_i, i 層と j 層との接触境界を S_{ij} で表している。図の右側には, 各層間の接続の関係のグラフを示している。



図–1 多層領域とその接続関係のグラフ

領域を上添字で示し, 境界に関する量を下添字で表す。境界要素方程式 (2) をこの領域に適用すると,

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{A}_{00}^{(0)} & -\mathbf{A}_{0,01}^{(0)} & -\mathbf{A}_{0,02}^{(0)} \\ -\mathbf{A}_{01,0}^{(0)} & -\mathbf{A}_{01,01}^{(0)} & -\mathbf{A}_{01,02}^{(0)} \\ -\mathbf{A}_{02,0}^{(0)} & -\mathbf{A}_{02,01}^{(0)} & -\mathbf{A}_{02,02}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_0^{(0)} \\ \mathbf{s}_{01}^{(0)} \\ \mathbf{s}_{02}^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{00}^{(0)} & \mathbf{B}_{0,01}^{(0)} & \mathbf{B}_{0,02}^{(0)} \\ \mathbf{B}_{01,0}^{(0)} & \mathbf{B}_{01,01}^{(0)} & \mathbf{B}_{01,02}^{(0)} \\ \mathbf{B}_{02,0}^{(0)} & \mathbf{B}_{02,01}^{(0)} & \mathbf{B}_{02,02}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0^{(0)} \\ \mathbf{u}_{01}^{(0)} \\ \mathbf{u}_{02}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_0^{(0)} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{01}^{(0)} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{02}^{(0)} \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{A}^{(1)}_{11} & -\mathbf{A}^{(1)}_{1,10} & -\mathbf{A}^{(1)}_{1,12} \\ -\mathbf{A}^{(1)}_{10,1} & -\mathbf{A}^{(1)}_{10,10} & -\mathbf{A}^{(1)}_{10,12} \\ -\mathbf{A}^{(1)}_{12,1} & -\mathbf{A}^{(1)}_{12,10} & -\mathbf{A}^{(1)}_{12,12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}^{(1)}_{1} \\ \mathbf{s}^{(1)}_{10} \\ \mathbf{s}^{(1)}_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{(1)}_{11} & \mathbf{B}^{(1)}_{1,10} & \mathbf{B}^{(1)}_{1,12} \\ \mathbf{B}^{(1)}_{10,1} & \mathbf{B}^{(1)}_{10,10} & \mathbf{B}^{(1)}_{10,12} \\ \mathbf{B}^{(1)}_{12,1} & \mathbf{B}^{(1)}_{12,10} & \mathbf{B}^{(1)}_{12,12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(1)}_{1} \\ \mathbf{u}^{(1)}_{10} \\ \mathbf{u}^{(1)}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{A}^{(2)}_{20,20} & -\mathbf{A}^{(2)}_{20,21} \\ -\mathbf{A}^{(2)}_{21,20} & -\mathbf{A}^{(2)}_{21,21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}^{(2)}_{20} \\ \mathbf{s}^{(2)}_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{(2)}_{20,20} & \mathbf{B}^{(2)}_{20,21} \\ \mathbf{B}^{(2)}_{21,20} & \mathbf{B}^{(2)}_{21,21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(2)}_{20} \\ \mathbf{u}^{(2)}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

となる。接触境界 S_{ij} における連続条件は次のようになる。

$$\mathbf{s}^{(i)}_{ij} + \mathbf{s}^{(j)}_{ji} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{u}^{(i)}_{ij} = \mathbf{u}^{(j)}_{ji} \tag{6}$$

多層領域の解析法

境界 S_0, S_1 において s^0_0, s^1_1 が与えられているものとしよう。連続条件 (6) を考慮して, (3), (4), (5) をまとめると, 方程式

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}^{(0)}_{00} & \mathbf{B}^{(0)}_{0,01} & \mathbf{B}^{(0)}_{0,02} & 0 & -\mathbf{A}^{(0)}_{0,01} & 0 & -\mathbf{A}^{(0)}_{0,02} & 0 \\ \mathbf{B}^{(0)}_{01,0} & \mathbf{B}^{(0)}_{01,01} & \mathbf{B}^{(0)}_{01,02} & 0 & -\mathbf{A}^{(0)}_{01,01} & 0 & -\mathbf{A}^{(0)}_{01,02} & 0 \\ \mathbf{B}^{(0)}_{02,0} & \mathbf{B}^{(0)}_{02,01} & \mathbf{B}^{(0)}_{02,02} & 0 & -\mathbf{A}^{(0)}_{02,01} & 0 & -\mathbf{A}^{(0)}_{02,02} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^{(1)}_{1,10} & 0 & \mathbf{B}^{(1)}_{11} & \mathbf{A}^{(1)}_{1,10} & \mathbf{B}^{(1)}_{1,12} & 0 & \mathbf{A}^{(1)}_{1,12} \\ 0 & \mathbf{B}^{(1)}_{10,10} & 0 & \mathbf{B}^{(1)}_{10,1} & \mathbf{A}^{(1)}_{10,10} & \mathbf{B}^{(1)}_{10,12} & 0 & \mathbf{A}^{(1)}_{10,12} \\ 0 & \mathbf{B}^{(1)}_{12,10} & 0 & \mathbf{B}^{(1)}_{12,1} & \mathbf{A}^{(1)}_{12,10} & \mathbf{B}^{(1)}_{12,12} & 0 & -\mathbf{A}^{(1)}_{12,12} \\ 0 & 0 & \mathbf{B}^{(2)}_{20,20} & 0 & 0 & \mathbf{B}^{(2)}_{20,21} & \mathbf{A}^{(2)}_{20,20} & \mathbf{A}^{(2)}_{20,21} \\ 0 & 0 & \mathbf{B}^{(2)}_{21,20} & 0 & 0 & \mathbf{B}^{(2)}_{21,21} & \mathbf{A}^{(2)}_{21,20} & \mathbf{A}^{(2)}_{21,21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(0)}_{0} \\ \mathbf{u}^{(0)}_{01} \\ \mathbf{u}^{(0)}_{02} \\ \mathbf{u}^{(1)}_{1} \\ \mathbf{s}^{(0)}_{01} \\ \mathbf{u}^{(1)}_{12} \\ \mathbf{s}^{(0)}_{02} \\ \mathbf{s}^{(1)}_{12} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(0)}_{00} & 0 \\ \mathbf{A}^{(0)}_{01,0} & 0 \\ \mathbf{A}^{(0)}_{02,0} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}^{(1)}_{11} \\ 0 & \mathbf{A}^{(1)}_{10,1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}^{(0)}_{0} \\ \mathbf{s}^{(1)}_{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^{(0)}_{0} \\ \tilde{\mathbf{u}}^{(0)}_{01} \\ \tilde{\mathbf{u}}^{(0)}_{02} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

が得られる。この方程式を高速多重極法を用いて効率良く解く方法について考えよう。

反復法の収束性を向上させるためにはできるだけ対角に近い行列を作り出す必要があるが, 比較的容易に処理できるものとして, 次のものがある。

- 領域間の接続グラフにおいて, 接続の強度を接触面積で評価するものとし, 弱い接続をはずす。たとえば, 図で S_{01} をはずすと, B_0, B_2, B_1 の順に領域が並ぶ。係数行列をこの順に並べれば, 対角周辺に影響の大きな要素が集まる。
- $\mathbf{A}^{(0)}_{01,01}$ と $\mathbf{A}^{(1)}_{10,10}$ とは, 弾性係数の違いを除いて, ほぼ同じ性質の行列である。したがって, たとえば, 第 2 行に第 5 行を加えることによって, 非対角行列 $-\mathbf{A}^{(0)}_{01,01}$ の値をかなり小さくすることができる。
- 一般に, $\left|\left(\mathbf{B}^{(i)}_{jj}\right)_{kk}\right| > \left|\left(\mathbf{A}^{(i)}_{jj}\right)_{kk}\right|$ である。これを改善するために, 該当する行 (たとえば第 5 行) を応力ベクトル表現の行列に替える。

これらの処理は, 前処理あるいは計算過程において実行可能なものであり, 効率の良い解析が期待できる。

参考文献

[1] 福井卓雄, 井上耕一 : 高速多重極境界要素法による 2 次元動弾性問題の解析, 応用力学論文集, **1**, pp. 373–380, 1998.