高速多重極境界要素法による弾性体の3次元多層問題の解析

福井大学工学部　　　　　○ 米 元 悟 史
福井大学工学部　正会員　　福 井 卓 雄

これまでの研究において, 著者らは, 3 次元静弾性問題の解析のための高速多重極法を開発してその有効性を確認した [1]。この方法が現実的な問題に応用されるためには, 多層領域の解析を効率的に実行できることが必要であろう。本報では, 多層問題の解析に高速多重極境界要素法を適用するための手法について考察する。

3 次元静弾性問題における高速多重極境界要素法

3 次元静弾性問題における高速多重極境界要素法について簡潔に紹介する。等方等質弾性体を考える。領域 B およびその境界 ∂B における境界値問題は

$$G\left(u_{i,jj}+\frac{1}{1-2\nu}u_{j,ji}\right)+X_i=0 \quad \text{in } B, \qquad u_i=\hat{u}_i \quad \text{on } \partial B_1, \qquad s_i=\hat{s}_i \quad \text{on } \partial B_2 \tag{1}$$

である。ここに, u_i は変位, X_i は物体力, G はせん断弾性係数, ν は Poisson 比である。s_i は境界上の応力ベクトルで, 境界の単位法線ベクトルを n_i, 応力ベクトル作用素を T_{ij} とするとき,

$$s_i=T_{ij}u_j=G\left(\frac{2\nu}{1-2\nu}n_iu_{k,k}+n_ju_{i,j}+n_ju_{j,i}\right) \tag{2}$$

で与えられる。境界積分方程式は Somigliana の公式

$$C_{ij}(\boldsymbol{x})u_j(\boldsymbol{x})=u_i^0(\boldsymbol{x})+\int_{\partial B}G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})T_{jk}u_k(\boldsymbol{y})\,dS_y-\int_{\partial B}S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u_j(\boldsymbol{y})\,dS_y \tag{3}$$

により得られる。ここに, C_{ij} は自由項であり, u_i^0 は物体力項や初期変位を含んだ特解である。(3) に適切な近似を導入すると離散化された方程式は

$$-\mathbf{As}+\mathbf{Bu}=\mathbf{u}_0 \tag{4}$$

となる。これは, 境界条件が与えられるとき, 未知の境界値に関する線形方程式となる。方程式 (4) は密な係数行列を持つために, 要素数が数万を越えるような問題においては, 係数を計算し, それを解くために多量の計算を必要とする。高速多重極境界要素法においては, 方程式 (4) の係数行列を直接に計算せずに, 高速多重極法を用いて行列ベクトル積を計算することにより, 方程式を反復法で解き, 解析を高速に進める [1, 2]。

多層領域問題

図に示すような 2 層の領域にトンネルを掘削する問題を考えよう。仮に, 解析領域は有界であるとしておく。上層の領域を B_1, 下層の領域を B_2, 上層の境界を S_1+S_{12}, 下層の境界を S_2+S_{12} とする。S_{12} は上層と下層の接触境界である。

領域を上添字で示し, 境界に関する量を下添字で表す。境界要素方程式 (4) をこの領域に適用すると,

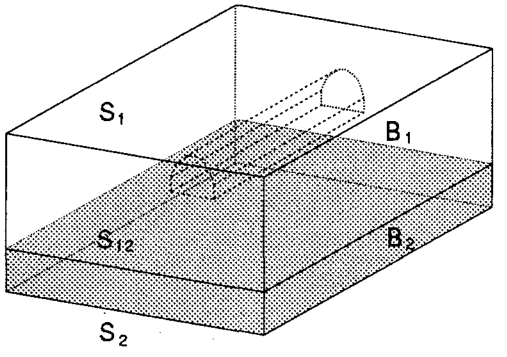
$$\begin{pmatrix}-\mathbf{A}_{11}^{(1)} & -\mathbf{A}_{13}^{(1)}\\ -\mathbf{A}_{31}^{(1)} & -\mathbf{A}_{33}^{(1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{s}_1^{(1)}\\ \mathbf{s}_3^{(1)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11}^{(1)} & \mathbf{B}_{13}^{(1)}\\ \mathbf{B}_{31}^{(1)} & \mathbf{B}_{33}^{(1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1^{(1)}\\ \mathbf{u}_3^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{u}_{01}^{(1)}\\ \mathbf{u}_{03}^{(1)}\end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix}-\mathbf{A}_{22}^{(2)} & -\mathbf{A}_{23}^{(2)}\\ -\mathbf{A}_{32}^{(2)} & -\mathbf{A}_{33}^{(2)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{s}_2^{(2)}\\ \mathbf{s}_3^{(2)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{22}^{(2)} & \mathbf{B}_{23}^{(2)}\\ \mathbf{B}_{32}^{(2)} & \mathbf{B}_{33}^{(2)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_2^{(2)}\\ \mathbf{u}_3^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{u}_{02}^{(2)}\\ \mathbf{u}_{03}^{(2)}\end{pmatrix} \tag{6}$$

となる。ここで, 接触境界 S_{12} に関する量は添字 3 で示している。接触境界における連続条件は

$$\mathbf{s}_3^{(1)}+\mathbf{s}_3^{(2)}=\mathbf{0}, \qquad \mathbf{u}_3^{(1)}=\mathbf{u}_3^{(2)} \tag{7}$$

である。すなわち, 接触境界量のうち $(\mathbf{u}_3^{(1)}, \mathbf{s}_3^{(1)})$ または $(\mathbf{u}_3^{(2)}, \mathbf{s}_3^{(2)})$ を決定しなければならない。



図–1 多層領域とその境界

高速多重極境界要素法による多層領域問題の解析

方程式系 (5), (6), (7) を解くにあたってはさまざまな方法が提案されている。しかし, 高速多重極境界要素法で問題を解く場合には, 行列ベクトル積の計算しかできないことを念頭においておくべきである。したがって, 部分行列の逆を使うような計算はできないことになる。高速多重極境界要素法で解析可能な方法として, 次の 2 つの方法について考えてみる。

方法 1 部分領域を単位としたブロックリラクゼーションを行なう。すなわち, 領域ごとに境界条件を仮定して解析して, 接続条件を順次満足させていく。計算手順は以下のようである。

1. B_1 について, 方程式 (5) を $\mathbf{u}_3^{(1)}$ を仮定して $\mathbf{s}_3^{(1)}$ について解く。
2. 条件 (7) により, $\mathbf{s}_3^{(1)}$ から $\mathbf{s}_3^{(2)}$ を決め, B_2 について, 方程式 (6) を $\mathbf{s}_3^{(2)}$ を仮定して $\mathbf{u}_3^{(2)}$ について解く。
3. $\mathbf{u}_3^{(1)}$ と $\mathbf{u}_3^{(2)}$ とを比較し, 誤差が大きければ, $\mathbf{u}_3^{(1)}$ を新たに仮定して **1.** からの計算を繰り返す。

この方法では, 一度に単一領域だけを解析するので, 単一領域で利用できる前処理が可能である。しかし, 方程式を直接に解くわけではなく, $O(N_1+N_2)$ の計算を繰り返すだけなので, 通常の境界要素法の場合のように計算量が減少するわけではない。また, 二重の反復計算を行なうことになるので, 反復の方法に工夫が必要であろう。一般に, 層の数が多いときには効率は良くないと考えられる。しかしながら, 層の材質の剛性が極端に異なる場合などには有効に利用できるであろう。

方法 2 問題を一つの方程式で直接に解く。たとえば, 境界 S_1 で $\mathbf{s}_1^{(1)}$ が与えられ, 境界 S_2 で $\mathbf{u}_2^{(2)}$ が与えられているとすると, 方程式は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11}^{(1)} & \mathbf{B}_{13}^{(1)} & 0 & -\mathbf{A}_{13}^{(1)} \\ \mathbf{B}_{31}^{(1)} & \mathbf{B}_{33}^{(1)} & 0 & -\mathbf{A}_{33}^{(1)} \\ 0 & \mathbf{B}_{23}^{(2)} & -\mathbf{A}_{22}^{(2)} & \mathbf{A}_{23}^{(2)} \\ 0 & \mathbf{B}_{33}^{(2)} & -\mathbf{A}_{32}^{(2)} & \mathbf{A}_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^{(1)} \\ \mathbf{u}_3^{(1)} \\ \mathbf{s}_2^{(2)} \\ \mathbf{s}_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{(1)} & 0 \\ \mathbf{A}_{31}^{(1)} & 0 \\ 0 & -\mathbf{B}_{22}^{(2)} \\ 0 & -\mathbf{B}_{32}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1^{(1)} \\ \mathbf{u}_2^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{01}^{(1)} \\ \mathbf{u}_{03}^{(1)} \\ \mathbf{u}_{02}^{(2)} \\ \mathbf{u}_{03}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{8}$$

となる。高速多重極法を使えば, この方法の一回の反復に要する計算量そのものは方法 1 の場合と変わらないが, 反復回数を抑えるための適切な前処理方法を開発する必要がある。しかしながら, 層構造が複雑になった場合には方法 1 と比べて方法 2 の方が有利であると考えられる。複雑な層構造に対するグラフ理論を用いた配列の組替えを含めて, ウェーブレット変換を用いた前処理方法 [3] を現在開発中である。

参考文献

[1] 福井卓雄, 玖津見敏広：高速多重極境界要素法による 3 次元静弾性問題の解析, 境界要素法論文集, **15**, pp. 99–104, 1998.

[2] 福井卓雄, 服部純一, 土居野優: 高速多重極法の境界要素解析への応用, 構造工学論文集, **43A**, pp. 373–382, 1997.

[3] 福井卓雄：Wavelet 変換を用いた境界要素反復解法における前処理, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, **9**, pp. 85–90, 1999.