高速多重極 Galerkin 境界要素法によるクラック群の解析

福井大学工学部　　　　○ 木畑貴道
福井大学工学部　正会員　福井卓雄

これまでの研究において, 多数クラックの進展解析の手法として, 境界要素法を使った解析法を提案し [1, 2], さらに, 解析の精度を向上させるために, Galerkin 境界要素法によるクラック解析法を提案してきた [3]。本報では, Galerkin 境界要素法を高速多重極法を使って解析することを試みる。

クラック群の境界積分方程式

議論を簡略にするために 2 次元無限弾性体中のクラック群について考える。クラックは数学クラックを仮定し, クラック面の摩擦は考慮しない。平面ひずみ問題を考えると, 変位 u_i は領域内で Navier の方程式

$$G\left(u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu}u_{j,ji}\right) + X_i = 0 \qquad \text{in } B \tag{1}$$

を満足する。弾性体中には M 個のクラック $S_1, S_2, \cdots, S_M$ が含まれているものとする。また, クラック内面には内圧 p が作用していると仮定する。このとき, クラック S_K の内面 S_K^+, S_K^- における境界条件は

$$s_i^+ = -pn_i \qquad s_i^- = pn_i \qquad \text{on } S_1, S_2, \cdots, S_M \tag{2}$$

となる。以上の式において, X_i は物体力, G はせん断弾性係数, ν は Poisson 比である。s_i は境界上の応力ベクトルで, 境界の単位法線ベクトルを n_i, 初期応力を σ_{ij}^0, 応力ベクトル作用素を T_{ij} とするとき,

$$s_i = n_j\sigma_{ji}^0 + T_{ij}u_j = n_j\sigma_{ji}^0 + G\left(\frac{2\nu}{1-2\nu}n_i u_{k,k} + n_j u_{i,j} + n_j u_{j,i}\right) \tag{3}$$

で与えられる。また, クラック上の量 f について, クラック面の法線 n_i と同じ外向き法線 n_i^+ を持つ面の量を f^+ で, 逆向きの外向き法線 n_i^- を持つ面の量を f^- で表すものとする。

Navier の方程式 (1) の基本特異解および第 2 基本特異解は次のように与えられる。

$$G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G}\left[(3-4\nu)\,\delta_{ij}\log\frac{1}{r} + r_{,i}r_{,j} - 2(1-\nu)\,\delta_{ij}\right], \quad S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = T_{jk}^y G_{ki}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{4}$$

クラック表面における境界積分方程式は, Somigliana の公式の応力ベクトル形に境界条件 (2) を考慮すれば

$$-pn_i(\boldsymbol{x}) = n_j\sigma_{ji}^0 - \sum_K \mathrm{Pf}\int_{S_K} U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})[u_j](\boldsymbol{y})\,dS_y \tag{5}$$

となる。ここに, $[u_i] = u_i^+ - u_i^-$ はクラックの開口変位であり, $U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = T_{ik}^x S_{kj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ である。

Galerkin 境界要素法

クラック表面の変位を区分線形関数で近似する。ただし, クラック先端の変位についてはクラック先端要素 [1] を使うことにする。開口変位を $[u_i](\boldsymbol{x}) \simeq \sum_I f^I(\boldsymbol{x})[u_i]^I$ で近似するとき, 境界積分方程式 (5) の Galerkin 法による近似は

$$-p_i^I = s_i^{0I} - \sum_K \left\{\sum_J F_{ij}^{IJ}[u_j]^J\right\}_K \tag{6}$$

となる [3]。ここに, 係数 F_{ij}^{IJ} は

$$F_{ij}^{IJ} = \int_{\partial B}\int_{\partial B} U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) f^I(\boldsymbol{x}) f^J(\boldsymbol{y})\,dS_x\,dS_y \tag{7}$$

である。

高速多重極 Galerkin 境界要素法

境界要素方程式 (6) の解析に高速多重極法を利用するためには, 係数行列要素 (7) の多重極表現が必要である。これを実現するために, (6) の積分を多重極展開における積分と局所展開における積分とで表そう。

まず, (7) を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対する依存関係を明らかにするように書き直して

$$F_{ij}^{IJ} = \int_{\partial B} f^I(\boldsymbol{x}) T_{ik}^x \left[\int_{\partial B} S_{kj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) f^J(\boldsymbol{y})\, dS_y \right] dS_x \tag{8}$$

とする。変位を複素ポテンシャル ϕ, χ を使って, $u_1 + iu_2 = (1/G)[\kappa\phi(z) - z\overline{\phi}'(\overline{z}) - \overline{\chi}'(\overline{z})]$ $(\kappa = 3 - 4\nu)$ で表すものとすれば, 第 2 基本特異解 S_{ij} の多重極展開は

$$\phi^S(z, z_0) = \frac{G[u]\nu}{2\pi(\kappa+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_0^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} M_n(z_0) \frac{1}{z^n} \tag{9}$$

$$\chi^S(z, z_0) = -\frac{G([u]\overline{\nu} + [\overline{u}]\nu)}{2\pi(\kappa+1)} \log z + \frac{G}{2\pi(\kappa+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[([u]\overline{\nu} + [\overline{u}]\nu) \frac{z_0^n}{nz^n} - [u]\nu \frac{\overline{z}_0 z_0^{n-1}}{z^n} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} N_n(z_0) \frac{1}{z^n} \tag{10}$$

によって決定される [1]。ここに, z, z_0 は $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を, ν は $\boldsymbol{y}$ における単位法線を, $[u]$ は開口変位を表す。また, $1/z^0$ は $-\log z$ を意味するものとする。この表現のもとで, (8) のカギカッコ内の積分は

$$\int_{\partial B} \phi^S(z, z_0) f^J(\boldsymbol{y})\, dS_y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \int_{\partial B} M_n(z_0) f^J(\boldsymbol{y})\, dS_y \tag{11}$$

$$\int_{\partial B} \chi^S(z, z_0) f^J(\boldsymbol{y})\, dS_y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \int_{\partial B} N_n(z_0) f^J(\boldsymbol{y})\, dS_y \tag{12}$$

で決定される。すなわち, カギカッコ内の積分は要素による影響関数の多重極展開を与える。

$\boldsymbol{x}$ における演算には局所展開形

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n z^n, \qquad \chi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n z^n \tag{13}$$

を使う。式 (8) の $\boldsymbol{x}$ における演算は, 境界の応力ベクトルに近似基底 f^I をかけて積分する操作である。境界の応力ベクトルは, 単位法線を ν とすると

$$s_1 + is_2 = 2\left[\nu\phi'(z) + \nu\overline{\phi}'(\overline{z}) - \overline{\nu} z \overline{\phi}''(\overline{z}) - \overline{\nu}\overline{\chi}''(\overline{z}) \right] \tag{14}$$

で表されるから,

$$\int_{\partial B} (s_1 + is_2) f^I(\boldsymbol{x})\, dS_x = 2\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{K_n a_n^I}{n} + \frac{\overline{K}_n \overline{b}_n^I}{n} \right) - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\overline{K}_n \overline{c}_n^I}{n(n-1)} + \frac{\overline{L}_n \overline{a}_{n-1}^I}{n(n-1)} \right) \right] \tag{15}$$

$$a_n^I = \int_{\partial B} \nu z^{n-1} f^I(\boldsymbol{x})\, dS_x, \quad b_n^I = \int_{\partial B} \overline{\nu} z^{n-1} f^I(\boldsymbol{x})\, dS_x, \quad c_n^I = \int_{\partial B} \nu \overline{z} z^{n-2} f^I(\boldsymbol{x})\, dS_x \tag{16}$$

によって係数 F_{ij}^{IJ} を計算することができる。積分 (16) は (11), (12) に現れる積分と同じものである。したがって, 文献 [1] で述べられたように, 線形要素およびクラック先端要素を用いる場合には, これらの積分は解析的に評価することができる。すなわち, Galerkin 境界要素法の場合であっても選点法を使う場合とほぼ同等の計算量で高速多重極法を実行することができる。

参考文献

[1] 福井卓雄, 持田哲郎, 井上耕一 : 境界要素法によるクラック群の進展解析, 構造工学論文集, **44A**, pp. 443–452, 1998.

[2] 福井卓雄, 持田哲郎, 井上耕一 : 境界要素法によるクラック群の進展解析に関する一考察, 境界要素法論文集, **14**, pp. 47–52, 1997.

[3] 本多作之助, 福井卓雄 : Galerkin 境界要素法によるクラック群の進展解析, 土木学会中部支部平成 10 年度研究発表会講演概要集, I-16, pp. 41–42, 1999.3.