高速多重極境界要素法による 3 次元波動散乱問題の解析

福井大学工学部 ○ 今田 武志
福井大学大学院 学生員 稲津 恭介
福井大学工学部 正会員 福井 卓雄

波動問題は境界要素法が有効に利用できる分野の一つである。しかしながら，境界要素法が実用の問題に適用できるためには，大きな自由度の問題を扱い得るように境界要素法を効率化する必要がある。この観点から，我々は 2 次元波動問題において高速多重極法を利用して境界要素法を効率化する手法を提案してきた [1, 2]。問題が 3 次元になれば，問題の自由度は必然的に大きくなり，解法の効率化はより重要になる。この研究では，3 次元波動問題における高速多重極境界要素法の構成を試みる。

3 次元波動問題の境界積分方程式

3 次元空間中の周波数領域波動散乱問題を考える。散乱体の外部領域を B, 境界を ∂B とする。波動場 u は Helmholtz 方程式を満足する。境界値問題は

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad \text{in } B, \qquad u = \hat{u} \quad \text{on } \partial B_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \hat{s} \quad \text{on } \partial B_2 \tag{1}$$

である。ここに，∇^2 は Laplace 作用素，k は波数，$\partial/\partial n$ は外向き法線微分を示す。この問題の解 u は，一般化された Green 公式

$$C(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}) = \tilde{u}(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial B} \left[G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{y}) - S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u(\boldsymbol{y}) \right] dS_y \tag{2}$$

により表される。ここに，$\tilde{u}$ は入射波，C は点 $\boldsymbol{x}$ の位置に依存するパラメータで，$\boldsymbol{x}$ が領域内のとき $C = 1$, 領域外のとき $C = 0$, 滑らかな境界上にあるとき $C = 1/2$ の値をとる。また，G, S は基本特異解および第二基本特異解で

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}, \qquad S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial n_y} \tag{3}$$

である。一般化 Green 公式 (2) は，点 $\boldsymbol{x}$ が境界上にあるとき，境界値 u, $\partial u/\partial n$ に関する拘束条件となり，境界条件が与えられれば，未知の境界値に関する積分方程式となる。

3 次元波動問題における高速多重極法

高速多重極法は，対象とする波動場を多重極展開および局所展開により表現し，それらの係数間の変換を利用して，多数の波源により生成される波動場を効率良くまとめて計算する方法である [1]。高速多重極法を構成するためには，波動場の展開形を定義し，それらの係数間の変換関係を求めておくことが必要である。3 次元波動問題におけるこれらの関係式は，Epton と Dembart[3], Rokhlin[4] により導かれている。ここでは，Epton と Dembart に従って高速多重極法を構成するための基礎式を示す。

多重極展開および局所展開を，極座標 (r, θ, ϕ) を使って

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} M_n^m h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} M_n^m O_n^m(\boldsymbol{x}) \qquad \text{(多重極展開)} \tag{4}$$

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} L_n^m j_n(kr) Y_n^{-m}(\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} L_n^m I_n^{-m}(\boldsymbol{x}) \qquad \text{(局所展開)} \tag{5}$$

と表す。ここに，j_n と $h_n^{(1)}$ はそれぞれ第 1 種および第 3 種の球 Bessel 関数であり，Y_n^m は球面調和関数で Epton と Dembart [3] に従って

$$Y_n^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}(-1)^m P_n^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{6}$$

で定義した。P_n^m は Legendre の陪関数である。基本特異解 $(3)_1$ の展開形は

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} = \frac{i}{4\pi}h_0^{(1)}(k|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{(2n+1)i}{4\pi}I_n^{-m}(\boldsymbol{y})\,O_n^m(\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

と書けるから，その多重極モーメントは $[(2n+1)i/4\pi]I_n^{-m}(\boldsymbol{y})$ である。

Epton と Dembart[3] によれば $Q_n^m = O_n^m$（または I_n^m）および I_n^m に対して，関係

$$Q_n^m(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=-l}^{l}\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'}\frac{(2l+1)(2n'+1)}{4\pi}\,i^{n'-n+l}E\begin{pmatrix} m & m' & -j\\ n & n' & l\end{pmatrix}I_{n'}^{-m'}(-\boldsymbol{a})\,Q_l^j(\boldsymbol{x}) \tag{8}$$

が成り立つ。ここに，$E()$ は，球面調和関数の単位球面上における積分

$$E\begin{pmatrix} i & j & k\\ l & m & n\end{pmatrix} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi}Y_l^i(\theta,\phi)Y_m^j(\theta,\phi)Y_n^k(\theta,\phi)\sin\theta\,d\theta\,d\phi \tag{9}$$

で定義される。関係 (8) を使えば，多重極展開 (4) および局所展開 (5) の間の係数の変換関係

$$\tilde{M}_n^m = \sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=-l}^{l}\frac{(2n+1)(2n'+1)}{4\pi}\,i^{n+n'-l}E\begin{pmatrix} -m & m' & j\\ n & n' & l\end{pmatrix}I_{n'}^{-m'}(\boldsymbol{a})M_l^j \tag{10}$$

$$L_n^m = \sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=-l}^{l}(-1)^{n+m}\frac{(2n+1)(2n'+1)}{4\pi}\,i^{n+n'-l}E\begin{pmatrix} -m & -m' & j\\ n & n' & l\end{pmatrix}O_{n'}^{m'}(-\boldsymbol{a})M_l^j \tag{11}$$

$$\tilde{L}_n^m = \sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{l=-j}^{j}\frac{(2n+1)(2n'+1)}{4\pi}\,i^{n+n'-l}E\begin{pmatrix} -m & m' & j\\ n & n' & l\end{pmatrix}I_{n'}^{-m'}(\boldsymbol{a})L_l^j \tag{12}$$

が得られる。(10) は多重極から多重極，(11) は多重極から局所展開，(12) は局所展開から局所展開への変換関係である。多重極展開 (4)，局所展開 (5) および変換関係 (10)，(11)，(12) を使って高速多重極法を構成することができる。

高速多重極境界要素法

境界要素方程式 (2) を離散化して解く過程において，反復法を用い，反復法の実行に必要な行列ベクトル積を高速多重極法を用いて計算すれば，境界要素法の解析を高速に実行することができる。なお，離散化方程式の影響係数の計算には基本特異解の展開形 (7) を $\boldsymbol{y}$ について積分して用いる。

波動問題の高速多重極法では計算に必要な展開項数が波数に依存する。波数が大きな問題では項数が大きくなるので，積形式 (diagonal form) の変換関係を利用して計算効率を上げることが有効である [2]。3 次元波動問題の積形式は Rokhlin[4] により提案されている。積形式の利用については今後の課題としたい。

参考文献

[1] 福井卓雄，勝本順三: 2 次元 Helmholtz 方程式のための高速多重極アルゴリズムと境界要素法への応用，境界要素法論文集，第 14 巻，pp. 81–86, 1997.

[2] 福井卓雄，勝本順三: 高速 Fourier 変換を援用した高速多重極境界要素法による 2 次元散乱問題の解析，境界要素法論文集，第 15 巻，pp. 93–98, 1998.

[3] Epton, M.A. and B. Dembart : Multipole translation theory for the three-dimensional Laplace and Helmholtz equations, *SIAM J. Sci. Comput.*, **16**, pp. 865–897, 1995.

[4] Rokhlin, V. : Diagonal forms of translation operations for the Helmholtz equation in three-dimensions, *Appl. Comput. Harmonic Anal.*, **1**, pp. 82–93, 1993.