圧密問題における均質化法の適用に関する研究

名古屋大学大学院工学研究科	学生員	○早川 真
名古屋大学工学部	正会員	清木 隆文
名古屋大学工学部	正会員	市川 康明

1. はじめに

我が国では、高レベル放射性廃棄物の処理方法として、地下深部の地層に埋設し、透水性の低いベントナイトを遮蔽材として用いる方法が考えられている。数万年にわたる半減期を考えれば、粘土の長期挙動を把握することは重要である。そこで、本研究では均質化法を用いて粘土の浸透問題を解き、圧密問題への適用を試みる。

2. Navier-Stokes 方程式の均質化法への適用

均質化法とは、材料が微視的な周期構造を持つことを利用し、繰り返し構造を有する材料のミクロな構造とマクロ挙動を結び付けることができる理論である。ここでは、Navier-Stokes 流の定常浸透問題を解析し、ミクロな視点で考察する。

流体が非圧縮性と仮定できるときの Navier-Stokes 流の方程式は

$$-\frac{\partial P^\varepsilon}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 V_i^\varepsilon}{\partial x_k \partial x_k}+\rho X_i=0 \qquad \mathrm{in}\,\Omega^\varepsilon \tag{1}$$

$$\frac{\partial V_i^\varepsilon}{\partial x_i}=0 \qquad \mathrm{in}\,\Omega^\varepsilon \tag{2}$$

$$V_i^\varepsilon=0 \qquad \mathrm{on}\,\Gamma \qquad \Gamma\ :\ \text{液体、固体境界} \tag{3}$$

である。ここで V_i^ε は流速、P^ε は圧力、μ は粘性、ρ は水の密度、X_i は物体力である。

次に、V_i^ε、P^ε を摂動展開する。

$$V_i^\varepsilon(\boldsymbol{x})=\varepsilon^2V_i^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\varepsilon^3V_i^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\cdots \tag{4}$$

$$P^\varepsilon(\boldsymbol{x})=P^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\varepsilon P^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\cdots \tag{5}$$

$V_i^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$、$P_i^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は Y-periodic な関数と呼ばれ、$V_i^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=V_i^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{Y})$、$P_i^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=P_i^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{Y})$ を満たす関数である。さらに、微分演算子が $\frac{\partial}{\partial x_i}\Longrightarrow\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_i}$ となることに注意して、これを式 (1) 代入すると、$\varepsilon\to 0$ のときに成り立つ必要があるので、各オーダーの項について

$$\varepsilon^{-1}\text{項}:\ \frac{\partial P^0}{\partial y_i}=0 \qquad \Longrightarrow \qquad P^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=P^0(\boldsymbol{x}) \qquad \mathrm{in}\ Y_F \qquad Y_F\ :\ \text{流体領域} \tag{6}$$

$$\varepsilon^{0}\text{項}:\ \rho X_i^0-\frac{\partial P^0}{\partial x_i}-\frac{\partial P^1}{\partial y_i}+\mu\frac{\partial^2 V_i^0}{\partial y_k\partial y_k}=0 \qquad \mathrm{in}\ Y_F \tag{7}$$

式 (2) についても同様に

$$\varepsilon^{1}\text{項}:\ \frac{\partial V_i^0}{\partial y_i}=0 \quad , \quad \varepsilon^{2}\text{項}:\ \frac{\partial V_i^0}{\partial x_i}+\frac{\partial V_i^1}{\partial y_j}=0 \qquad \mathrm{in}\ Y_F \tag{8}$$

式 (3) の境界条件は

$$V_i^0=0,\ \ V_i^1=0\ \ \cdots \qquad \mathrm{on}\ \Gamma \tag{9}$$

となる。ここで以下のように正規化された特性関数 v_i^k と p_i^k を導入する。

$$V_i^0=(\frac{\partial P^0}{\partial x_k}-\rho X_k^0)v_i^k \quad , \quad P^1=(\frac{\partial P^0}{\partial x_k}-\rho X_k^0)p^k \tag{10}$$

これらを代入すると、式(7)はつぎのように書き換えられる。

$$\mu \frac{\partial^2 v_i^k}{\partial y_j \partial y_j} - \frac{\partial p^k}{\partial y_i} + \delta_{ik} = 0 \qquad \text{in } Y_F \tag{11}$$

同様に式(8)の ε^1 項、式(9)もつぎのように書き換えられ、周期条件も含めて

$$\frac{\partial v_i^k}{\partial y_i} = 0 \qquad \text{in } Y_F \qquad , \qquad v_i^k = 0 \qquad \text{on } \Gamma \tag{12}$$

$$V_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; t) = V_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{Y}; t) \qquad , \qquad P^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; t) = P^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{Y}; t) \tag{13}$$

式(11)-(13)は微視方程式と呼ばれる。
また、式(8)の ε^2 項を平均化 ($\widetilde{V_i}^0 = \frac{1}{|Y|}\int_{Y_F} V_i^0 dy$) し、正規化すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{V_i}^0}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|Y|}\int_{Y_F} V_i^0 dy\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left(\rho X_i^0 - \frac{\partial P^0}{\partial x_i}\right)\frac{1}{|Y|}\int_{Y_F} v_j^i dy\right\} = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

これは、巨視方程式と呼ばれる。ここで、

$$\widetilde{V_k^0} = \left(\rho X_k^0 - \frac{\partial P^0}{\partial x_k}\right) K_{ij} \quad ; \qquad K_{ij} = \frac{1}{|Y|}\int_{Y_F} v_j^i dy \tag{15}$$

であるが、これはDarcy則に他ならないことが分かる。
ここで、実流速、実圧力は式(4)、(5)の第一項目で近似されるので、均質化透水係数 K_{ij} と、従来の透水係数 k_{ij} の関係が次のようになることに注意する。

$$k_{ij} = \varepsilon^2 \rho g K_{ij} \tag{16}$$

g は重力加速度である。

3. Biotの圧密方程式への適用

Biotの圧密方程式の支配方程式は、透水係数を $k_{ij} = k\delta_{ij}$ とし、増分形で書くと以下のようになる。

$$\frac{\partial \Delta \acute{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} + f_i = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{k}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x_i} + k w_i\right) \qquad \text{in } \Omega \tag{18}$$

$\acute{\sigma}_{ij}$ は有効応力、p は間隙水圧、ε_v は体積ひずみである。

4. 数値解析

ユニットセルにおいては層状構造を考えるので、一方向の流れしか存在しない。したがって、式(16)の透水係数は k_{11} で表される。しかし、実際の粘土では、ユニットセル郡があらゆる方向に配置され、水はどの方向にも自由に流れることができると仮定し、巨視構造の圧密解析をする。また、圧密が進行するにしたがって発生するひずみによってユニットセルの層間が変化し、k も変化すると考えるので、k は場所と時間で変化する関数（$k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$）であることに注意する。

参考文献

1) E.Sanchez-Palencia: Non-homogeneous media and vibration theory; Lecture notes in phisics, Springer-Verlag, 1980
2) 谷口 貴之: 均質化法による粘土鉱物周辺の浸透流評価, 卒業論文, 名古屋大学,1997