II−23

拡散シミュレーションにおける差分スキームと格子スケールの影響に関する検討

中部大学　学生員　○大坪郁宜　　中部大学　学生員　酒井孝典
中部大学　　　　　倉谷尚伸　　中部大学　正会員　武田　誠
　　　　　　　　　　　　　　　中部大学　正会員　松尾直規

1．はじめに

拡散現象を対象とした数値解析では、移流項差分スキームの取り扱いが従来から問題となっている。拡散項の計算は比較的精度良く行えるのに対し、移流項の計算は様々な提案がなされているにもかかわらず、その計算法は今なお確立していない。一方、数値解析は時間的、空間的に格子を配置し、その格子の平均値をもって計算するので、格子スケールが結果に及ぼす影響も無視できないと考えられる。本研究では、移流項差分スキームと格子スケールとの関係について検討を行い、その特性を明らかにする。

2．数値解析手法

本研究に用いる物質輸送の基礎方程式は以下に示す移流方程式と拡散方程式である。

$$\frac{\partial CH}{\partial t}+\frac{\partial CM}{\partial x}+\frac{\partial CN}{\partial y}=0 \qquad \cdots(1)$$

$$\frac{\partial CH}{\partial t}+\frac{\partial CM}{\partial x}+\frac{\partial CN}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(DH\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(DH\frac{\partial C}{\partial y}\right) \qquad \cdots(2)$$

ここで、x,y：平面の空間座標、t：時間、C：濃度、H：水深、M,N：それぞれx,y方向の流量フラックス、D：拡散係数である。

基礎方程式の離散化には差分法を用いる。本研究では、解析精度上問題となる移流項に着目し、その差分化の影響を比較するために、表１にある３通りの差分スキームを選択した。なお、拡散項には中央差分を用いている。

表１　移流項差分スキームの設定

Scheme 設定	空間方向差分法	時間方向差分法
Scheme 1	DONOR	Adams Bashforth
Scheme 2	2step Lax-Wendoroff	
Scheme 3	QUICK	Adams Bashforth

3．計算条件

図１のような一様流速の流れ場に空間的に正規分布を示す物質濃度を与え、式(1)あるいは式(2)を用いて解析を行い、解析値と理論値との比較により移流項差分スキームと格子スケールの影響を検討する。空間的な格子スケールΔxを100mから1000mまで100mごとに10通り変化させて解析を行う。初期濃度分布は図２のように３ケースを設定した。CASE1は初期濃度の総量が一定の場合であり、CASE2は総量を格子スケールによって相似的に変化させた場合、CASE3は総量を格子スケールによって変化させピーク値を一致させた場合である。なお、本研究では、一様流速0.5m/s、計算時間間隔5sで計算した場合の2800step後における計算結果を用いて検討しており、拡散シミュレーションにおける拡散係数には$0.01\Delta x^{4/3}$を用いている。

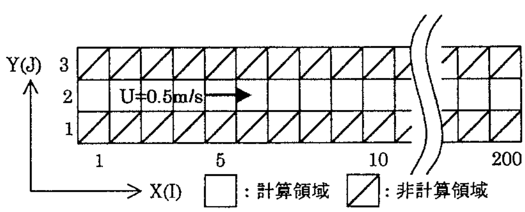

図１　１次元的な流れ場

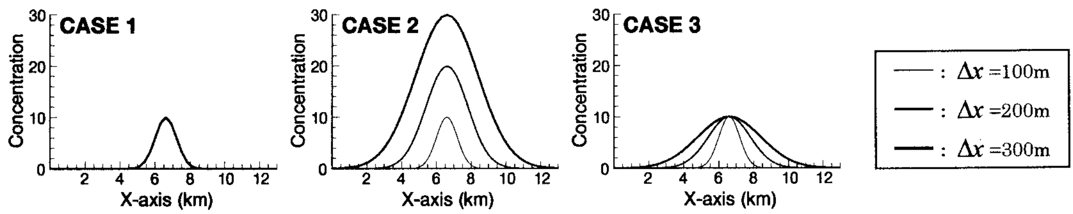

図２　初期濃度分布の設定

4．CASE1 の場合

計算結果を図３に示す。図３から移流方程式の場合、すべてのスキームで格子スケールが大きくなれば誤差も大きくなることが分かる。また、Scheme2 および Scheme3 ではダンピングが発生しており、Scheme2 では位相差も発生していた。これは Δx が大きいほど初期濃度分布は粗くなるために生じたものと考えられる。拡散方程式の場合は、格子スケールが大きくなっても誤差値はそれほど変化していない。これは、拡散効果によりダンピングが抑えられたことによるものと考えられる。この場合、格子スケールの大きさは表現する初期濃度分布の粗さに影響を与え、その結果、解析精度に影響が現れたと考えられる。

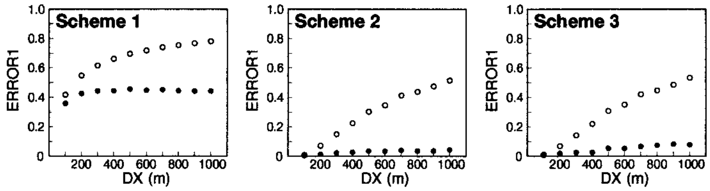

図３　CASE1 の計算結果

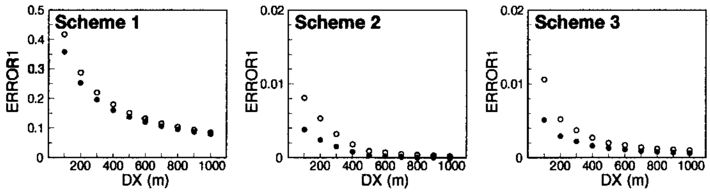

図４　CASE2 の計算結果(1)

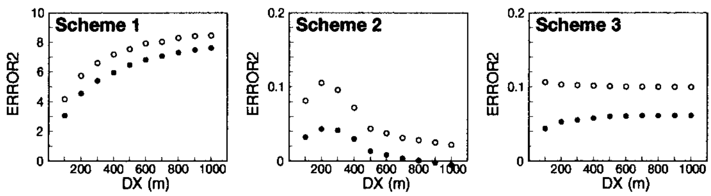

図５　CASE2 の計算結果(2)

○…移流方程式による解　●…拡散方程式による解

$$\text{ERROR1：誤差値} = \frac{\text{理論値のピーク値} - \text{解析値のピーク値}}{\text{理論値のピーク値}}$$

ERROR2：誤差値＝理論値のピーク値－解析値のピーク値

(図４・５の Scheme2･3 は値が小さいので拡大している)

5．CASE2 の場合

計算結果を図４に示す。図４から移流方程式の場合、すべてのスキームで格子スケールが大きくなれば誤差は小さくなることが分かる。また、Scheme2 では小さい格子スケールでのみ、ダンピングと位相差が発生していた。これは Δx が大きいほど初期濃度に対する移流効果が小さくなるため、ERROR1 で定義した誤差値が小さくなったものと考えられる。そこで、誤差値を ERROR2 でとった計算結果を図５に示す。図５から格子スケールが大きくなれば誤差は Scheme1 では大きくなり、Scheme2 では減少、Scheme3 ではほぼ一定となった。拡散方程式の場合も同様な傾向にある。また、差分スキームを高次なものにすることで精度が飛躍的に良くなっていることが分かる。

6．CASE3 の場合

ERROR1 に関しては CASE2 と同じ結果(図４)を得た。この場合、すべてのケースで理論値のピーク値は一致しているため、ERROR2 でも同様な結果となる。これは、Δx が大きいほど滑らかな濃度分布を与えるため、数値誤差が抑えられたと考えられる。逆に、突出した濃度分布は数値誤差を発生させると考えられる。

7．おわりに

これらの検討より、拡散問題における格子スケールは、対象とする濃度分布を十分に表現しうるように、かつその濃度分布は滑らかとなるように設定すべきであることが、数値解析の観点から示された。また、勾配の大きい突出した現象については、ダンピングや位相差が発生するので適切な移流項差分スキームを選択する必要があり、高次の差分法を用いることで解析精度が飛躍的に向上することが示された。なお、Scheme2 では位相差が発生しているため、Scheme3 が本解析のなかで最もよい差分スキームであると考えられる。

参考文献　1)武田　誠：大村湾における潮汐流の３次元特性と温度成層の影響評価に関する研究、長崎大学修士論文、pp.46-87、1994.2.　2)小松利光・大串浩一郎・朝位孝二：拡散シミュレーションにおける移流輸送の高精度計算法の開発、土木学会論文集、No.456/Ⅱ-21、pp.37-46、1992.11.