

スプライン要素法を用いた変厚長方形Mindlin板の振動解析について

大同工業大学工学部 ○西川知日子
大同工業大学工学部 正員 水澤富作

1. はじめに 構造物の軽量化や最適化のために、変断面性状を持つ板要素が多く用いられている。実際に用いられる長方形板の板厚は、ステップ状またはティーパー状に変化する場合がある。このような変厚板の振動解析は、支持される境界条件に関係なく厳密な解を求めることが困難な問題の1つである。これまでも、変厚長方形板の振動解析については¹⁻³⁾、種々の数値解析法を用いた研究が多数報告されているが、その多くは薄板理論に基づくものであり、また境界条件の導入にも大きな制約が見られる。

本文では、Mindlin板理論に基づくSpline要素法を用いて、一方向に変厚な長方形厚板の振動解析を行っている。本手法の解析精度や収束性に与える要素分割数の影響について検討した。また、任意の境界条件を持つ長方形板の振動特性に与える変厚比、幅厚比や辺長比などの影響について明らかにしている。

2. 解析手法 Mindlin板理論とポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて、Fig. 1に示すような一方向に変厚なSpline要素モデルを導く。式の定式化にあたり、次式で表される無次元直交座標系を用いる。

$$\xi = x/a, \eta = y/b, W' = W/b \quad \dots (1) \quad \text{ここで、} W \text{ はたわみであり、} a \text{ と } b \text{ はそれぞれ長方形板の長さおよび幅を示す。}$$

横せん断変形と回転慣性の影響を考慮したMindlin板理論では、次式で示すそれぞれ独立した3つの変位関数が要素内で仮定される。

$$\begin{aligned} \phi_x &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \\ \phi_y &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \dots (2) \\ W &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \end{aligned}$$

ここで、 W はたわみであり、 ϕ_x と ϕ_y は回転角である。

また、 $i_x = k-1+M_x$, $i_y = k-1+M_y$, $N_{m,k}(\xi)$ と $N_{n,k}(\eta)$ は、それぞれ正規化されたB-spline関数である。 A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} は未定係数である。ただし、 $k-1$ はspline関数の次数であり、また M_x と M_y はそれぞれ x -方向と y -方向の要素分割数である。長方形板の板厚は、 ξ -方向に任意の形状で変化すると仮定している。 $\xi=0$ と $\xi=1$ での板厚を h_0 と h_1 とすると、板厚が凸型断面の場合は、次式で示される。 $h(\xi) = h_0 \{ \delta - (\delta-1)(1-\xi)^p \} = h_0 H(\xi) \dots (3)$ 、また、凹型断面の場合は、 $h(\xi) = h_0 \{ (\delta-1)\xi^{p+1} + 1 \} = h_1 H(\xi) \dots (4)$ で与えられる。ここで、 δ は変厚比であり、 h_1/h_0 で表される。また、上式において、板厚断面の形状を表す多項式の次数、 p 変化させれば、任意の板厚に変化させられる。したがって、変断面板の曲げ剛性は、 $D(\xi) = D_0 H(\xi)^3$ で表される。ここで、 $D_0 = E h_0^3 / [12(1-\nu^2)]$ 、 E はヤング係数、また ν はポアソン比である。

したがって、式(3)または(4)で与えられる変断面性状を持つMindlin長方形板のひずみエネルギー、 U は、

$$\begin{aligned} U &= (D_0/2) (a/b) \int_0^1 \int_0^1 H(\xi)^3 \{ (\partial \phi_x / \partial \xi + (a/b) \partial \phi_y / \partial \eta)^2 - (1-\nu) \{ 2(a/b) (\partial \phi_x / \partial \xi) (\partial \phi_y / \partial \eta) \\ &\quad - (1/2) \{ (a/b) \partial \phi_x / \partial \eta + \partial \phi_y / \partial \xi \}^2 \} + 6(1-\nu) \kappa (b/h_0)^2 (a/b)^2 H(\xi) \{ \phi_x + (a/b) (\partial W' / \partial \xi) \}^2 \\ &\quad + \{ (\partial W' / \partial \eta) + \phi_y \}^2 \} d\xi d\eta \dots (5) \end{aligned}$$

ここで、 κ は修正せん断係数であり、 $5/6$ に仮定している。また、この板の運動エネルギー、 T は、

$$T = (\rho h_0/2) \omega^2 \phi a b^3 \int_0^1 \int_0^1 \{ H(\xi) W'^2 + (1/12) (h_0/b)^2 H(\xi)^3 (\phi_x^2 + \phi_y^2) \} d\xi d\eta \dots (6)$$

で与えられる。ここで、 ρ は密度であり、 ω は円振動数(rad/sec)である。変厚長方形Mindlin板の全ポテ

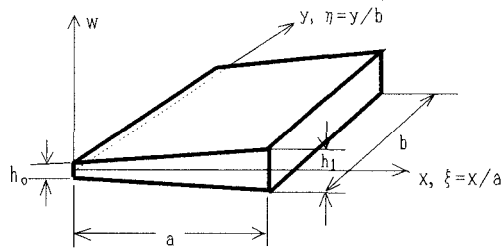


Fig. 1 Rectangular Mindlin plate with linearly varying thickness in the x-direction

ンシャルエネルギー, Π は、次式で示される。 $\Pi=U-T \cdots (7)$ したがって、式 (2) を式 (7) に代入し、 Π を極値化すれば、次式の固有方程式が得られる。

$$\partial \Pi / \partial \{\Delta\} = 0 \quad \cdots (8)$$

3. 数値計算例及び考察

固定辺、単純支持辺と

自由辺を持つ一方方向に変厚な長方形板では、これらの境界条件の組合わせが、等厚板の21種類に対して53種類になる。本手法を用いれば、任意の境界条件が取り扱える。Table 1には、一方向に直線的に板厚が変化する周辺単純支持と周辺固定の正方形Mindlin板の振動数パラメータ, $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}$ の収束性に与える要素分割数の影響が示されている。また、比較のために他の数値解析法¹⁻³⁾による結果も示してある。ただし、 $b/h_0=10$, $k=1=3$, $\nu=0.3$ に仮定している。これより、安定した収束性が示されており、また他の数値解と比較して、良く一致した結果が得られている。

Fig. 2は、周辺固定正方形Mindlin板の n^* に与える幅厚比 b/h_0 と変厚比 h_1/h_0 の影響を示している。ここで、 h_1/h_0 は1.0から2.75まで変化させている。これより、 b/h_0 の減少とともに、横せん断変形の影響が大きく生じ、また変厚比の影響が顕著に見られる。

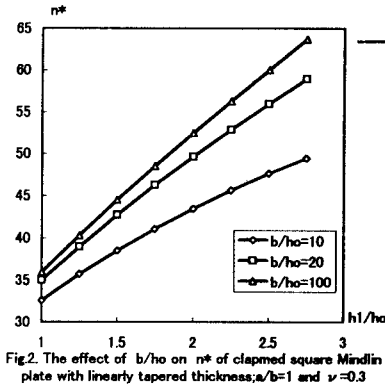
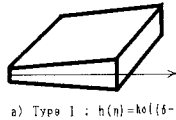


Fig.2. The effect of b/h_0 on n^* of clamped square Mindlin plate with linearly tapered thickness, $a/b=1$ and $\nu=0.3$



a) Type 1 : $h(x) = h_0 \{ (x-1) \xi + 1 \}$



b) Type 2 [$p=2$] and Type 3 [$p=3$] : $h(x) = h_0 \{ (x-1) \xi^p + 1 \}$



c) Type 4 [$p=2$] and Type 5 [$p=3$] : $h(x) = h_0 \{ (x-1) \xi^p + 1 \}$

Fig. 3 Variation of varying thickness in the x-direction

4. あとがき 本文で得られた主な結果を示すと以下ようになる。1) 本手法を用いれば、任意の変断面形状と境界条件を持つ長方形Mindlin板の振動解析ができる。2) 幅厚比の減少とともに、振動数に与える変厚比の影響が顕著に見られる。3) 長方形Mindlin板の振動数は、変断面の形状により大きな影響を受ける。

参考文献

1. Liew et.al.: Transverse vibration of thick rectangular plates-comprehensive sets of boundary conditions. Comput. & Struct., 49, 1-29, 1993.
2. Mikami, T. and Yoshimura, J.: Application of the collocation method to vibration analysis of rectangular Mindlin plates. Comput. & Struct., 18, 425-431, 1984.
3. Mizusawa, T.: Vibration of rectangular Mindlin plates with tapered thickness by the spline strip method. Comput. & Struct., 46, 451-463, 1993.

Table 1. Convergence study of frequency parameters of tapered square plates with several boundary conditions: $a/b=1.0$, $b/h_0=10.0$ and $k=1=3$

Boundary conditions	h1/h0	M _z =M _y	Modes				
			1st	2nd	3rd	4th	5th
SS-SS	1. 0	8	18.98	45.36	45.36	69.51	84.82
		12	19.02	45.42	45.42	69.65	85.04
		16	19.04	45.44	45.44	69.71	85.04
		Liew et al. [1]	19.07	45.48	45.48	69.79	85.04
		Mikami et al [2]	19.06	45.45	45.45	69.72	84.93
		Mizusawa [3]	19.06	45.45	45.45	69.72	84.93
	2. 0	8	27.01	61.31	61.66	91.84	108.4
		12	27.07	61.39	61.74	92.02	108.5
		16	27.10	61.42	61.78	92.09	108.5
		Mikami et al [2]	27.11	60.56	61.73	92.02	108.3
		Mizusawa [3]	27.12	61.38	61.74	92.01	108.3
CC-CC	1. 0	8	32.51	62.01	62.01	86.86	102.5
		12	32.52	62.03	62.03	86.91	102.4
		16	32.52	62.03	62.03	86.93	102.4
		Liew et al. [1]	32.52	62.04	62.04	86.95	102.4
		2. 0	8	43.45	78.96	79.11	108.4
		12	43.47	78.99	79.15	108.5	124.7
		16	43.48	79.00	79.16	108.5	124.7
		2. 0	8	43.45	78.96	79.11	108.4
		12	43.47	78.99	79.15	108.5	124.7
		16	43.48	79.00	79.16	108.5	124.7

Table 2. The effect of the ratio of thickness on frequency parameters, n^* of square Mindlin plates: CC-CC, $a/b=1.0$ and $b/h_0=10.0$

h1/h0	Type	Modes				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
1.0		32.52	62.03	62.03	86.91	102.4
1.25	1	35.68	67.20	67.23	93.56	109.6
	2	34.77	65.24	65.84	91.50	106.9
	3	34.31	64.26	65.14	90.44	105.5
	4	36.58	68.56	69.07	95.52	111.9
	5	37.63	69.21	70.01	96.48	112.9
1.5	1	38.53	71.65	71.74	99.26	115.5
	2	36.80	68.02	69.19	95.50	110.4
	3	35.93	66.19	67.88	93.54	107.8
	4	40.17	74.07	74.95	102.7	119.4
	5	40.98	75.19	76.57	104.3	121.1
1.75	1	41.11	75.55	75.68	104.2	120.5
	2	38.67	70.49	72.16	99.05	113.4
	3	37.44	67.91	70.32	96.31	109.8
	4	43.36	78.75	79.91	108.6	125.5
	5	44.46	80.20	82.01	110.7	127.7
2.0	1	43.47	78.99	79.15	108.5	124.7
	2	40.41	72.72	74.82	102.2	116.0
	3	38.84	69.47	72.52	98.80	111.4
	4	46.20	82.75	84.15	113.6	130.6
	5	47.52	84.42	86.57	116.0	133.1

これより、変断面形状を持つ正方形板の振動数は、変断面の形状に大きく影響を受けることがわかる。