I－7

Consistent 接線剛性を用いた繰り返し弾塑性有限変位解析

名古屋大学　学生員　○今満　欣貴　　名古屋大学　学生員　岡澤　重信
名古屋大学　フェロー　宇佐美　勉
名古屋大学　正会員　葛　漢彬

1. 緒言

汎用有限要素法プログラム ABAQUS では，他の汎用的な有限要素法プログラム MARC や FEAP などよりも容易に，材料構成式サブルーチンを取り込むことができる．そのため，本研究室で開発した修正二曲面モデル[1][2]をユーザ定義のサブルーチンとして組み込み，解析を行うことが可能である．しかし，弾塑性構成方程式の応力積分において前進型応力積分を用いた場合では，既知の諸量のみで未知の値を求めるため 1 ステップあたりの増分が大きすぎると解の精度が落ち収束が悪くなる．さらに，Bi-linear や Multi-linear などの応力-歪曲線の折れ曲がり点において，歪増分を弾性部分と塑性部分に分けるような手続きをとらなければならない[3][4]．それに対して，後退型応力積分では応力そのものが降伏条件等を満たすように応力積分を行うため，比較的大きな歪増分でも解の精度が劣化せず，さらに応力-歪曲線の折れ曲がり点でも特別な手続きは必要ない．ただし後退型応力積分を用いたとしても，古典的弾塑性理論から得られる 4 階の構成式テンソルを用いて接線剛性マトリックスを作成すると，弧長法における Newton-Raphson 法による収束計算において二次の収束が得られない．これは，弾塑性構成式テンソルが本来，応力速度と歪速度間で成立するものであり，有限要素解析で扱う有限応力増分と有限歪増分間の接線にはなっていないためである[5]．Newton-Raphson 法で 2 次の収束を得るためには後退型応力積分アルゴリズムに Consistent な構成式テンソルを用いる必要がある[6][8]．

本研究の目的は修正二曲面モデルにおいて後退型応力積分とそれに Consistent な構成式テンソルを用いることによって，有限要素解析における収束改善を試みることである．

2. 後退型応力積分

今，時刻 t の配置までが解析済みで Δt 後の時刻 t' における物体の未知配置を解析することを考える．このとき，時刻 t から t' までの歪増分に対する応力増分値は変形経路にそって応力を積分することによって得ることができる．ただ，4 階の構成式テンソル $\boldsymbol{C}^{ep}$ はその時点の応力の関数になっているため，解析的に応力積分を行うことは困難である．したがって，多くの場合，数値的に積分を行うことになる．

後退型応力積分では，時刻 t' における ${}^{t'}\boldsymbol{C}^{ep}$ を用いて応力を計算する．ただし，前進型応力積分と異なり，${}^{t'}\boldsymbol{C}^{ep}$ 自体が未知数であるため，${}^{t'}\boldsymbol{\sigma}$ に関する連立方程式を解く必要がある．そのかわり，求まる ${}^{t'}\boldsymbol{\sigma}$ は当初から降伏曲面上に存在するため，降伏曲面に引き戻すための修正の必要はなく応力-歪曲線の折れ曲がり点でも歪増分を調整する必要がない．そのため，歪増分を大きく取ることができる．

後退型応力積分において，解くべき連立方程式は以下の通りである．

$$
\begin{aligned}
{}^{t'}\boldsymbol{\sigma} &= {}^{t}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{C} : (\Delta \boldsymbol{e} - \Delta \boldsymbol{e}^{p}) && (1)\\
\Delta \boldsymbol{e}^{p} &= \Delta\lambda\, {}^{t'}\boldsymbol{\sigma}' && (2)\\
\Delta\lambda &= \frac{3}{2}\frac{\Delta \bar{e}^{p}}{{}^{t'}\bar{\sigma}} && (3)\\
{}^{t'}\bar{\sigma} &= \sigma_{y}({}^{t'}\bar{e}^{p}) && (4)
\end{aligned}
$$

ここで $\Delta \boldsymbol{e}$，$\Delta \boldsymbol{e}^{p}$ はそれぞれ歪テンソル増分，塑性歪テンソル増分であり，$\bar{\sigma}$ は von Mises の相当応力である．そして，σ_y は降伏応力で，これは相当塑性歪 $\bar{e}^{p}$ の関数となる．又，$\boldsymbol{C}$ は 4 階の弾性構成式テンソルであり，${}^{t'}\boldsymbol{\sigma}'$ は時刻 t' における偏差応力である．

上記の連立方程式を解く際に，Bi-linear などの塑性域での応力-歪関係が直線の場合には非線形方程式を解く必要はないが，応力-歪関係が非線形の場合には相当塑性歪増分 $\Delta \bar{e}^{p}$ を求める際に Newton-Raphson 法などにより非線形方程式を解く必要がある．

なお，平面応力の場合には上記の後退型応力積分法は適用できず，他の特別な方法を用いなければならないため注意が必要である[7]．

3. consistent 接線剛性

von Mises の降伏関数を塑性ポテンシャルとした関連流れ則に基づいた弾塑性理論において得られる弾塑性構成式テンソルは以下のようである.

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= [\boldsymbol{C} - \frac{(\boldsymbol{C}:\boldsymbol{\sigma}')\otimes(\boldsymbol{C}:\boldsymbol{\sigma}')}{(\boldsymbol{C}:\boldsymbol{\sigma}'):\boldsymbol{\sigma}' + \frac{4}{9}\bar{\sigma}^2 H'}]:\dot{\boldsymbol{e}} \\ &= [\boldsymbol{C} - \frac{9G^2}{3G+H'}(\frac{1}{\bar{\sigma}^2})(\boldsymbol{\sigma}'\otimes\boldsymbol{\sigma}')]:\dot{\boldsymbol{e}} \\ &= [\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}^p]:\dot{\boldsymbol{e}} \\ &= \boldsymbol{C}^{ep}:\dot{\boldsymbol{e}} \end{aligned} \tag{5}$$

ここで H'は硬化係数である.

後退型応力積分アルゴリズムに Consistent な構成式テンソルは，時刻 t ではなく，時刻 t'で新たに微分を行うことによって得られる.

今，

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{P}:\boldsymbol{\sigma} \tag{6}$$

となるように 4 階のテンソル$\boldsymbol{P}$を導入する．関連流れ則で成立する以下の関係式 (7) に式 (6) を代入すると式 (8) となる.

$$\Delta\boldsymbol{e}^p = \Delta\lambda\ {}^{t'}\boldsymbol{\sigma}' \tag{7}$$

$$\Delta\boldsymbol{e}^p = \Delta\lambda\boldsymbol{P}:\ {}^{t'}\boldsymbol{\sigma} \tag{8}$$

式 (8) を式 (1) に代入して，両辺を時刻 t'で微分することによって Consistent な弾塑性構成式テンソルは以下のように得られる[6].

$$\begin{aligned} d\,{}^{t'}\boldsymbol{\sigma}' &= [\boldsymbol{C}^* - \frac{(\boldsymbol{C}^*:\ {}^{t'}\boldsymbol{\sigma}')\otimes(\boldsymbol{C}^*:\ {}^{t'}\boldsymbol{\sigma}')}{{}^{t'}\boldsymbol{\sigma}':(\boldsymbol{C}^*:\ {}^{t'}\boldsymbol{\sigma}') + \frac{4}{9}\gamma\ {}^{t'}H'\ ({}^{t'}\bar{\sigma})^2}]:d\,{}^{t'}\boldsymbol{e} \\ &= \boldsymbol{C}^{ep*}:d\,{}^{t'}\boldsymbol{e} \end{aligned} \tag{9}$$

ただし，$\boldsymbol{C}^* = (\boldsymbol{C}^{-1} + \Delta\lambda\boldsymbol{P})^{-1}$，$\gamma = (1 - \frac{2}{3}\ {}^{t'}H'\Delta\lambda)^{-1}$である.

この$\boldsymbol{C}^{ep*}$を用いることによって有限要素解析における弧長法において，Newton-Raphson 法特有の 2 次の収束が保障される[5][6].

4. 例題

Consistent 接線剛性を用いた解析結果に関しては，紙面の都合により割愛し，当日発表することにする.

5. 結論

本研究では，弾塑性構成式を有限応力増分と有限歪増分の接線関係となるように書き換え，後退型応力積分アルゴリズムに Consistent な弾塑性構成方程式を示した．この Consistent な構成式テンソルを用いることによって有限要素法における弧長法において理論的に 2 次の収束が保証され大きなステップサイズの選択が可能である．しかしながら，大きなステップサイズにおいて弾塑性挙動の履歴が忠実に再現されているかは，まだ検討の余地があると思われる.

参考文献

[1] 水野英二，沈赤，宇佐美勉，鋼部材の繰り返しねじり実験と二曲面モデルによる数値シミュレーション，構造工学論文集，Vol.39A,pp221-234,1993.
[2] 水野英二，沈赤，宇佐美勉，鋼素材に対する修正二曲面モデルの一般定式化，構造工学論文集，Vol.40A,pp235-248,1994.
[3]Owen,D.R.J.and Hinton,E.，塑性の有限要素法　-材料非線形有限要素法-(山田嘉昭訳)，科学技術出版社,1988.
[4] 山田嘉昭，塑性・粘弾性 (有限要素法の基礎と応用シリーズ 6)，培風館,1980
[5] 久田俊明，野口裕久，非線形有限要素法の基礎と応用，丸善，1995
[6]Simo,J.C.and Taylor,R.L.,Consistent Tangent Operators for Rate-Independent Elastoplastisity, Comp. Meth. in Appl. Mech. And Eng.,Vol.48,pp101-118,1985.
[7]Schreyer,H.L.,Kulak,R.F.and Kramer,J.M.,Accurate Numerical Solutions for Elastic-Plastic Models,Journal of Pressure Vessel Technology, ASME,101,pp.226-234,1979.
[8]Simo,J.C.and Hughes,T.J.R,Computational Inelasticity,Springer,1998