高速多重極境界要素法による3次元時間領域波動問題の解析

福井大学工学部　学生員　○　稲津恭介
福井大学工学部　正会員　　福井卓雄

時間領域波動問題の境界積分方程式

3次元空間中を伝播する進行波の散乱問題を考える。散乱体の外部領域を B, 境界を ∂B, 入射波を $u^i(\boldsymbol{x},t)$ とする。入射波が散乱体に到着する以前, すなわち, $t<0$ において波動場は $u=0$ とすると, 境界値問題は

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{in } B, \qquad u=\hat{u} \quad \text{on } \partial B_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \hat{s} \quad \text{on } \partial B_2 \tag{1}$$

となる。ここに, ∇^2 はLaplace作用素, c は波の速度, $\partial/\partial n$ は外向き法線微分を示す。

この問題の解 u は, 良く知られているKirchhoffの積分公式

$$C(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x},t) = u^i(\boldsymbol{x},t) + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{y},t-r/c) - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)u(\boldsymbol{y},t-r/c) + \frac{1}{cr}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial u}{\partial t}(\boldsymbol{y},t-r/c)\right] dS_y \tag{2}$$

により表される。ここに, $r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ であり, C は点 $\boldsymbol{x}$ の位置に依存するパラメータで, $\boldsymbol{x}$ が領域内のとき $C=1$, 領域外のとき $C=0$, 滑らかな境界上にあるとき $C=1/2$ の値をとる。$(1/r)\partial u/\partial n(\boldsymbol{y},t-r/c)$ などは遅延ポテンシャルであり, 境界の影響が有限の時間の後に到達することを表している。

Kirchhoffの公式(2)は, 適当な境界条件が与えられるとき, 未知の境界値に関する境界積分方程式となる。時間および境界において適当な近似を導入し, これを時間ステップ法で解析することにより3次元波動問題の近似解を得ることができる。通常の解法でこれを解くと, その計算量は, 時間ステップ数 N_t, 境界要素数 N_B に対して, $O(N_t N_B^2)$ となるが, 高速多重極法をこの計算に適用して計算量を $O(N_t N_B)$ の程度に減少させようというのが本研究の目的である。

時間領域波動問題における多重極法

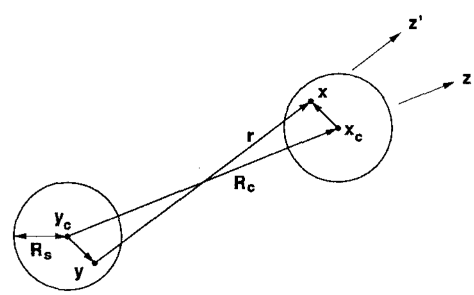
時間領域波動問題の多重極表現についてはさまざまな提案がなされている [1, 2]。ここでは, 多重極波源から発生する波をさまざまな方向へ伝播する平面波の集合として表現する方法 [2] を用いることにする。

$\boldsymbol{y}$ に存在する1個の波源による $\boldsymbol{x}$ 点の波動場

$$u(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi r}s(\boldsymbol{y},t-r/c) = \frac{1}{4\pi r}f(t-r/c) \tag{3}$$

の多重極表現について考えよう。ここに, f は波源の強度の時間変化を表す関数である。

多重極点を $\boldsymbol{y}_c$, 局所表現の中心を $\boldsymbol{x}_c$ とする (図-1)。いま, $\boldsymbol{R}_c = \boldsymbol{x}_c - \boldsymbol{y}_c$ の方向に z-軸をとり球面座標 (θ,ϕ) を導入する。このとき, u の平面波表現は



図−1　波源および観測点

$$\tilde{u}(\boldsymbol{x},t) = -\frac{1}{8\pi^2 c}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_{\text{int}}} f(t-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})/c)\sin\theta\, d\theta \tag{4}$$

で与えられる [3]。ここに, $\hat{\boldsymbol{k}}$ は単位球面上の点を表す。また, θ_{int} は後で決める積分域である。つぎに, この積分を $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ を z'-軸とする球面座標 (θ',ϕ') について実行すると,

$$\tilde{u}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi r}f(t-r/c) - \frac{1}{8\pi r}\int_0^{2\pi} f\left(t - \frac{r}{c}\cos\theta'_{\text{int}}(\phi',\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right) d\phi' \tag{5}$$

となる。この式を (3) と比較すると, 第 1 項は u そのものであり, 第 2 項が消去されれば $\tilde{u}$ は u に一致する。いま, 波源の強度が有限の時間 T_s の間だけ続くとすると, ある時刻から後は第 2 項の値が 0 となる。また, 波源の影響は距離 R_c を伝わって来るので, ある時刻までは u の値は 0 である。したがって, T_s を R_c に対して適当に選べば, 波源の影響が $\boldsymbol{x}$ に伝わる時刻には第 2 項がすでに 0 となっているようにすることができて, $u=\tilde{u}$ とすることができる。このための条件は

$$\frac{cT_s}{R_s} \le \frac{R_c}{R_s} - 2, \qquad \frac{cT_s}{R_s} \le \frac{R_c}{R_s}(1-\cos\theta_{\rm int}) - 4 \tag{6}$$

で与えられる。ここに, R_s は $\boldsymbol{y}_c$ を中心とする $\boldsymbol{y}$ を含む球の半径である。第 1 式は T_s を決定するために, 第 2 式は $\theta_{\rm int}$ を決定するために使われる。もしも, f が T_s よりも長い時間続く場合には, f を T_s 間隔で分割すれば, 上とまったく同様のことができる。

つぎに, 波動場 $\tilde{u}$ の表現を, $\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{y}_c$, $\boldsymbol{y}_c \to \boldsymbol{x}_c$, $\boldsymbol{x}_c \to \boldsymbol{x}$ の 3 段階の変換の形で表記しよう。このために, 式 (4) において $f(t-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})/c)$ を繰り込み積

$$f(t-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})/c) = \delta(t-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_c)/c) * \delta(t-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{R}_c/c) * \delta(t+\hat{\boldsymbol{k}}\cdot(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_c)/c) * f(t) \tag{7}$$

で表すことにする。ここに, $*$ は繰り込み積を表す。さらに, 作業関数

$$g(\hat{\boldsymbol{k}},t) = \delta(t-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_c)/c) * \delta(t+\hat{\boldsymbol{k}}\cdot(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_c)/c) * f(t) \tag{8}$$

を定義し, これを単位球面の上で

$$g(\hat{\boldsymbol{k}},t) = \sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-M_n}^{M_n} g(\hat{\boldsymbol{k}}_{nm},t)\Omega_{nm}(\hat{\boldsymbol{k}}) \tag{9}$$

のように展開する。この式を (4) に代入すれば, 波動場 $\tilde{u}$ は

$$\tilde{u}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-M_n}^{M_n} \delta(t-\hat{\boldsymbol{k}}_{nm}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_c)/c) * T_{nm} * \delta(t+\hat{\boldsymbol{k}}_{nm}\cdot(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_c)/c) * f(t) \tag{10}$$

のように展開される。ここに, 変換関数 T_{nm} は

$$T_{nm}(t) = -\frac{1}{8\pi^2 c}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_{\rm int}} \Omega_{nm}(\hat{\boldsymbol{k}})\delta(t-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{R}_c/c)\sin\theta\, d\theta \tag{11}$$

となる。

式 (10) は 3 段階の変換, 波源 ⇒ $\boldsymbol{y}_c$ についての展開 ⇒ $\boldsymbol{x}_c$ についての展開 ⇒ $\boldsymbol{x}$ 点における値, により構成されている。第 1 段階の変換により $\boldsymbol{y}$ 点に依存しない表現が得られる。したがって, $\boldsymbol{y}_c$ を中心として半径 R_s の球の内部に存在する多数の波源の寄与を一つの展開として表現することができる。また, 第 3 段階の変換は, $\boldsymbol{x}_c$ を中心として半径 $R_o \simeq R_s$ の球の内部の $\boldsymbol{x}$ について同じ展開表現をもとに生成することができる。したがって, 式 (10) を使って通常の高速多重極法と同様のアルゴリズムを構成することが可能である。

このアルゴリズムを利用した詳細な解析結果については当日報告する。

参考文献

[1] Heyman, E. and A.J. Devaney : Time-dependent multipoles and their application for radiation from volume source distributions, *J. Math. Phys.*, **37**, pp. 682–692, 1996.

[2] Ergin, A.A., B. Shanker and E. Michielssen : Fast evaluation of three-dimensional transient wave fields using diagonal translation operators, *J. Comput. Phys.*, **146**, pp. 157–180, 1998.

[3] Chapman, C.H. : Generalized Radon transforms and slant stacks, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **66**, pp. 445–453, 1981.