高速多重極境界要素法の3次元空洞問題への応用

福井大学工学部　学生員　○　玖津見 敏広
福井大学工学部　正会員　　福 井　卓 雄

1　はじめに

3 次元静弾性問題の高速多重極境界要素法を構成し, 空洞問題の解析に応用する。従来の境界要素法には, 自由度 N が大きくなるような問題を扱う場合, 計算量が $O(N^2)$〜$O(N^3)$ であるため解析が困難になるという弱点があった。高速多重極境界要素法はこの弱点を克服するために境界要素法に高速多重極法を適用した解析法で, これまでに 2 次元静弾性問題等に応用され計算量を $O(N)$ 程度にまで軽減している。2 次元の場合, 弾性場を表すのに最も基本的な複素解析関数を使って効率よく多重極法を得ているので, ここで扱う 3 次元静弾性問題についても基本ポテンシャルに基づいた高速多重極法を提案する。

2　3 次元静弾性問題の境界要素法

3 次元空間中の領域 B で変位 $\boldsymbol{u}$ が Navier の方程式を満足し, 境界 ∂B 上で与えられた境界条件を満足するとする。境界値問題は次のようになる。

$$G\left[u_{i,jj}+\frac{1}{1-2\nu}u_{j,ji}\right]+X_i=0 \quad \text{in } B, \qquad u_i=\hat{u}_i \quad \text{on } \partial B_1, \qquad T_{ij}u_j=\hat{s}_i \quad \text{on } \partial B_2 \tag{1}$$

ここに, $\boldsymbol{X}$ は物体力, G はせん断弾性係数, ν は Poisson 比, $T_{ij}u_j$ は境界上の応力ベクトルで, 応力と応力の作用素を

$$\sigma_{ij}=\Sigma_{ijk}u_k=G\left(\frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}u_{k,k}+u_{i,j}+u_{j,i}\right) \tag{2}$$

とすれば, $T_{ij}u_j=n_k\Sigma_{kij}u_j$ となる。Somigliana の公式より境界積分方程式は

$$\frac{1}{2}u_j(\boldsymbol{x})=\int_{\partial B}G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,T_{jk}u_k(\boldsymbol{y})\,dS_y-\int_{\partial B}S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,u_j(\boldsymbol{y})\,dS_y \tag{3}$$

$$G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{4\pi G}\left[\frac{\delta_{ij}}{r}+\frac{1}{4(1-\nu)}r_{,ij}\right], \qquad S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=T^y_{jk}G_{ki}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{4}$$

となる。$G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ はそれぞれ Navier の方程式の基本特異解, 第二基本特異解である。境界積分方程式 (3) を離散化すれば $\boldsymbol{u}$ または $\boldsymbol{Tu}$ を未知数とする線形代数方程式が導かれる。この方程式を高速に解くために, 繰り返し解法を用い, さらに以下で構成する高速多重極法を使って式 (3) 右辺の積分を評価する方法が高速多重極境界要素法である。

3　3 次元静弾性問題の高速多重極法

高速多重極法は N 個の点における N 個のソースからのポテンシャルの影響を高速に評価する方法である。本研究では, 多重極法を構成する基本ポテンシャルとして, 物体力のない場合に調和関数となる Neuber-Papkovich 関数を用いる。

境界要素法で評価する弾性場は基本特異解 (4) によるものである。弾性場を Neuber-Papkovich 関数 ϕ, χ で表現すると, 変位とそれに対応する応力は $\kappa=3-4\nu$ として

$$u_i=\frac{1}{2G}\left[\kappa\phi_i-x_j\phi_{j,i}-\chi_{,i}\right] \tag{5}$$

$$\sigma_{ij}=2\nu\phi_{k,k}\delta_{ij}+(1-2\nu)(\phi_{i,j}+\phi_{j,i})-x_k\phi_{k,ij}-\chi_{,ij} \tag{6}$$

で与えられる。$\boldsymbol{y}$ 点に集中荷重 $\boldsymbol{P}$ が作用するときの基本特異解の変位場 $G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})P_j(\boldsymbol{y})$ に対応する Neuber-Papkovich 関数を求めると

$$\phi_i^G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{P_i}{8\pi(1-\nu)|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}, \qquad \chi^G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=-\frac{y_iP_i}{8\pi(1-\nu)|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \tag{7}$$

となる。また，第二基本特異解による変位場 $S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})U_j(\boldsymbol{y})$ に対応する ϕ^S,χ^S は

$$\phi_i^S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{G}{8\pi(1-\nu)}\left[\frac{2\nu}{1-2\nu}n_jU_j\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{r}\right) + (n_iU_j+n_jU_i)\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$
$$\chi^S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{(1+\nu)G}{4\pi(1-\nu)(1-2\nu)}n_jU_j\frac{1}{r} - y_i\phi_i^S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{8}$$

となる。ϕ^G,χ^G はニュートンポテンシャルの場を表す。また，ϕ^S,χ^S はニュートンポテンシャルの場と双極子場の線形結合として表される。よって，ϕ, χ は $\boldsymbol{x}$ の極座標 (r,θ,ϕ) を使って，3 次元ポテンシャル問題と同じ多重極展開 (9) と局所展開 (10) によって表現できる [1][2]。

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\boldsymbol{M}_n^m\frac{Y_n^m(\theta,\phi)}{r^{n+1}}, \qquad \chi(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}N_n^m\frac{Y_n^m(\theta,\phi)}{r^{n+1}} \tag{9}$$

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\boldsymbol{K}_n^m r^n Y_n^m(\theta,\phi), \qquad \chi(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}L_n^m r^n Y_n^m(\theta,\phi) \tag{10}$$

ここに，Y_n^m は球面調和関数である。ϕ^G,χ^G についての多重極モーメント $\boldsymbol{M}_n^{Gm}, N_n^{Gm}$ は

$$\boldsymbol{M}_n^{Gm} = \frac{\boldsymbol{P}}{8\pi(1-\nu)}\rho^n Y_n^{-m}(\alpha,\beta), \qquad N_n^{Gm} = \frac{-\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{P}}{8\pi(1-\nu)}\rho^n Y_n^{-m}(\alpha,\beta) \tag{11}$$

により，ϕ^S,χ^S についての多重極モーメント $\boldsymbol{M}_n^{Sm}, N_n^{Sm}$ は

$$\boldsymbol{M}_n^{Sm} = \frac{G}{8\pi(1-\nu)}\left[\frac{2\nu}{1-2\nu}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{U})\boldsymbol{F} + (\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{U}+\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{F}\right], \qquad F_i = \frac{\partial}{\partial y_i}\left[\rho^n Y_n^{-m}(\alpha,\beta)\right]$$
$$N_n^{Sm} = -\frac{(1+\nu)G\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{U}}{4\pi(1-\nu)(1-2\nu)}\rho^n Y_n^{-m}(\alpha,\beta) - \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{M}_n^{Sm} \tag{12}$$

により，それぞれ計算することができる。

高速多重極法を構成するには，あと多重極の移動や局所表現への変換に伴う係数変換が必要となる。ϕ^S,χ^S が調和関数であるから，これらの変換は全て 3 次元ポテンシャル問題の多重極法における変換を用いて表現することができ，効率よく高速多重極法を構成できる [1][2]。高速多重極法によって計算した ϕ,χ を式 (5) や (6) に代入し，基本特異解による変位や応力を高速に評価することができる。

4 解析結果

3 次元静弾性問題の高速多重極境界要素法の例題として，無限体中の球形空洞を解析した。今回は一重層ポテンシャル法を使って解析し，精度の良い近似解を得ることができた。境界条件として無限遠に初期応力 $\sigma_{xx}^0 = \sigma, \sigma_{yy}^0 = \sigma_{zz}^0 = \sigma_{xy}^0 = \sigma_{yz}^0 = \sigma_{zx}^0 = 0$ を与え，多重極モーメントの要素上の積分には 9 点の Gauss 積分を使用している。

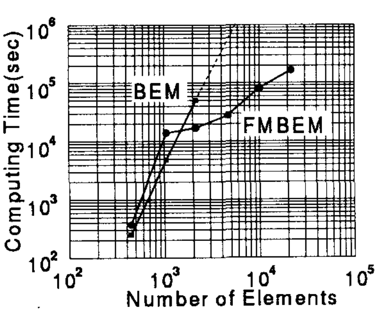

Fig-1

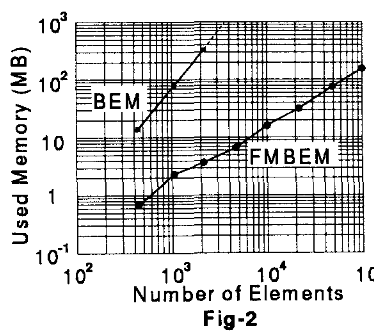

Fig-2

Fig-1 は，要素数に対する解析時間を従来の境界要素法と比較したものである。高速多重極境界要素法は $O(N)$ 程度の増加を示し，要素数が 1000 を越えたあたりから従来法よりも速くなっているのがわかる。高速多重極法では係数の引渡しにより計算を行うので，記憶容量も大幅に省略することができる。Fig-2 は，使用記憶容量について従来法と比較したもので，こちらも $O(N)$ 程度の増加が見られ，計算量・使用記憶容量ともに本手法の有効性を示している。

参考文献

[1] 福田育広，玖津見敏広，福井卓雄：高速多重極境界要素法による 3 次元静弾性解析，平成 9 年度土木学会中部支部講演概要集，I-89, pp. 175–176, 1998.

[2] 福井卓雄，玖津見敏広：高速多重極境界要素法による 3 次元静弾性問題の解析，境界要素法論文集，**15** pp. 99–104, 1998.