

一様熱流を受ける熱弾性混合境界値問題の解析

名古屋工業大学 学生会員 田垣昌文

名古屋工業大学 正会員 長谷部宜男

1. はじめに

一様熱流を受ける無限板中に矩形剛体介在物が存在する場合について混合境界値問題として解析する。応力境界、変位境界がそれぞれ一ヶ所存在する場合[1]については、すでに解析されており、本報告では文献[2]の続きとして応力境界、変位境界がそれぞれ二ヶ所存在する場合について解析する。解析領域を単位円外に写像する有理写像関数を用いて、単位円外で正則な複素応力関数を導き、応力分布を求める。また、剛体介在物と無限板との接着がはがれる剥離について発生・進展の可能性を考える。

2. 解析方法

図-1に示す矩形孔を有する無限板を、単位円外に写像する有理写像関数 $\omega(\zeta)$ は次式で与えられる[3]。

$$z = \omega(\zeta) \equiv E_0 \zeta + \sum_{k=1}^{36} \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_{-1} \quad (1)$$

ここで、 E_0 、 E_{-1} 、 E_k 、 ζ_k は、形状を表す複素定数である。任意点での温度 $\theta(\zeta, \bar{\zeta})$ および境界条件式は、有理写像関数 $\omega(\zeta)$ 、複素熱関数 $\Psi(\zeta)$ を用いて次式で表される。

$$\theta(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{2} [\Psi(\zeta) + \overline{\Psi(\zeta)}] \quad (2)$$

$$\text{境界条件式} \quad -k \{ \Psi(\sigma) - \overline{\Psi(\sigma)} \} = 2i \int q_n ds + \text{const} \quad (3)$$

ここで、 σ は単位円上の ζ を表し、 q_n は外力境界上で与えられる熱流を表す。

複素熱関数 $\Psi(\zeta)$ は、無限遠で一様な熱流を表す関数を考慮し、式(3)に代入してコーシー積分することにより、次式のように誘導される。

$$\Psi(\zeta) = -\frac{q}{k} \left\{ E_0 \zeta e^{-i\delta} + \frac{\bar{E}_0}{\zeta} e^{i\delta} \right\} \quad (4)$$

ここで、 k は熱伝導率、 δ は熱流がX軸となす角度である。

任意点での応力成分は、有理写像関数 $\omega(\zeta)$ 、複素応力関数 $\phi(\zeta)$ 、 $\psi(\zeta)$ を用いて次式より得られる[4]。

$$\sigma_y + \sigma_x = 4 \operatorname{Re} \left[\frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 \frac{\overline{\omega(\zeta)} \left\{ \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\}' + \psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \quad (5)$$

$$\sigma_\theta + \sigma_r = \sigma_y + \sigma_x \quad \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = \frac{\zeta^2 \omega'(\zeta)}{|\zeta|^2 \omega'(\zeta)} (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) \quad (6)$$

σ_x 、 σ_y は x, y 方向の応力成分、 σ_r 、 σ_θ は $\omega(\zeta)$ によって表される直交曲線座標における法線方向、接線方向の応力成分を表す。 $\operatorname{Re}[\cdot]$ は $[\cdot]$ の実部を表す。

応力、変位の境界条件式は応力境界上 (L_j , $j=1,2$) で応力=0、変位境界上 (M_j , $j=1,2$) で変位=0であることから、次式で与えられる。

$$\phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\phi'(\sigma) + \psi'(\sigma)} = 0 \quad \text{on } L_1 \quad \phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\phi'(\sigma) + \psi'(\sigma)} = C \quad \text{on } L_2 \quad (7)$$

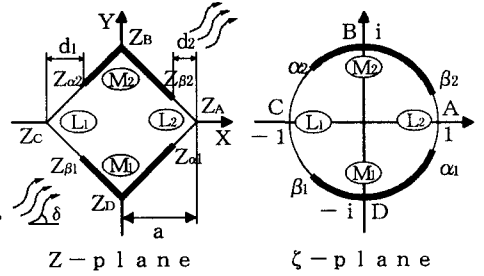


図-1 解析形状と写像面上の単位円

$$\kappa\phi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\overline{\phi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = -2G\alpha_0 \int \Psi(\zeta)\omega'(\zeta)d\zeta \quad \text{on } M \quad (8)$$

ここに、 $\phi(\zeta)$ 、 $\psi(\zeta)$ は単位円外で正則な複素応力関数である。 G はせん断弾性定数、 κ および α_0 はポアソン比と熱膨張係数により与えられる材料定数である。また、 C は $M_1 \sim L_1 \sim M_2$ での合力の釣り合いを満足させるための定数である。境界条件式、式(8)を積分して境界上を一周したときに生じる食い違いを打ち消す関数、 L 、 M 境界の結合部で変位を連続、応力を不連続にする関数、また、単位円外で複素応力関数が正則である条件を用いて $\phi(\zeta)$ は次式のように得られる。

$$\phi(\zeta) = A \log \zeta - \chi(\zeta) \sum_{k=1}^{36} \frac{(\bar{A}_k + \bar{A}_k \zeta_k) B_k}{\chi(\zeta)(\zeta_k - \zeta)} + \frac{\alpha_0 R G}{2k} \left[\frac{E_0 e^{-i\delta}}{2} \{\zeta^2 - \chi(\zeta)\} + \sum_{k=1}^{36} \left(E_0 e^{-i\delta} \zeta_k + \frac{\bar{E}_0 e^{i\delta}}{\zeta_k} \right) \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} \left\{ 1 - \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} \right\} \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{36} \left(E_0 e^{-i\delta} - \frac{\bar{E}_0 e^{i\delta}}{\zeta_k^2} \right) E_k \left\{ \log \frac{\zeta}{\zeta - \zeta_k} + \chi(\zeta) \int_{\zeta_k}^{\zeta} \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma - \zeta)} \right\} \right] + C \frac{\chi(\zeta)}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma - \zeta)} \quad (9)$$

ここに、 $\zeta_k' \equiv \frac{1}{\zeta_k}$ 、 $A = \frac{\alpha_0 R G}{2} E_0 \left(\sum_{k=1}^{36} E_k e^{-i\delta} + \bar{E}_0 e^{i\delta} \right)$ 、 $A_k \equiv \phi_2'(\zeta_k')$ 、 $B_k \equiv \frac{E_k}{\omega(\zeta_k')}$ であり、合力 C は

$\phi'(\infty) = 0$ の関係式より求められる。上下対称の剥離に横方向の熱流が作用する場合、左右対称の剥離に縦方向の熱流が作用する場合は、変位境界の応力による原点回りの合モーメントは発生しないので、介在物は回転しない。また、剥離が上下、左右対称に存在する場合は、任意の方向から熱流が流れてきても、横方向と縦方向の熱流に分解して考えることができるので、モーメントは発生せず、式(9)より複素応力関数を求めることができる。

3. 解析例

図-2に温度分布、図-3, 4に法線方向の応力分布を示す。温度分布は、境界での熱の出入りがないと仮定しているので剥離の位置に関係なく決まる。応力分布では、 σ_r が正の部分で剥離、クラックが発生すると考えられる。また、せん断応力も剥離、クラックの発生に関係していると考えられ、せん断応力も考慮した解析がこれからの課題である。

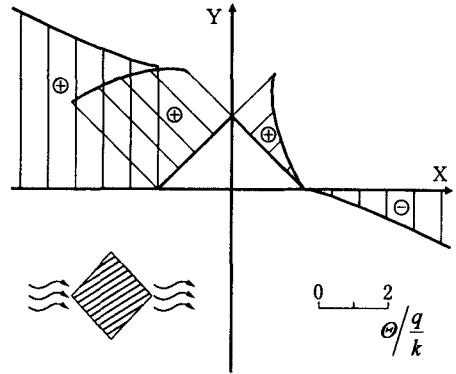


図-2 温度分布 ($\delta = 0^\circ$)

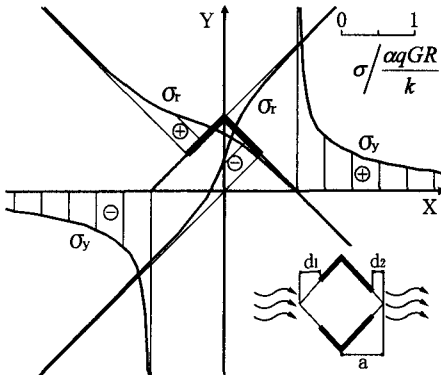


図-3 応力分布 [法線方向応力]
($\delta = 0^\circ$, $d_1/a = d_2/a = 0.5$)

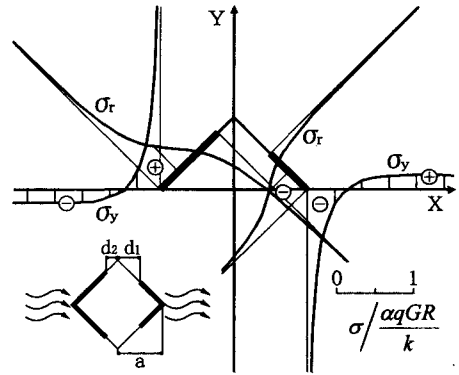


図-4 応力分布 [法線方向応力]
($\delta = 0^\circ$, $d_1/a = 0.5$, $d_2/a = 0.2$)

【参考文献】

- [1] N.Hasebe and H.Irikura Appl Mech, ASME, 1991 [2] 吉川和夫, 長谷部宣男, 応力境界・変位境界をそれぞれ二ヶ所有する熱弾性混合境界値問題の解析, 土木学会第 52 回年次学術講演会第一部, 1997
[3] J.Iida and N.Hasebe, J.of Engrg Mech, ASCE, 1987 [4] Muskhelishvili.N.I, Some basic problems of the mathematical theory of elastisity, Noordhoff, Groningen, 1963