# クラックの補修による残留熱応力の一計算

名古屋工業大学　学生会員　中　島　貴　幸
名古屋工業大学　　正会員　長谷部　宣　男
日本橋梁（株）　　正会員　　館　　浩　司

## 1．はじめに

クラックを有する無限板の点熱源による応力と無限領域内に存在する点熱源による応力との和をとることにより、点熱源によるクラックの補修というモデルの残留応力を解析する。

## 2．平面弾性問題の基本式

複素応力関数を用いると応力成分は次式のようになる。

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\ Re\left[\ \Phi'(z)\ \right] \qquad \sigma_y - \sigma_x + 2\,i\,\tau_{xy} = 2\left[\ \bar{z}\,\Phi''(z) + \Psi'(z)\ \right]$$

写像関数 $z=\omega(\zeta)$（本論文ではクラックの形状面で解析を行っているので $\omega(\zeta)=E_0\,\zeta+\dfrac{E_1}{\zeta}$）を用いて応力成分は次式となる。

$$\sigma_y + \sigma_x = 4\ Re\left[\ \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\ \right]$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2\,i\,\tau_{xy} = 2\,\frac{\overline{\omega(\zeta)}\left\{\phi'(\zeta)/\omega'(\zeta)\right\}' + \psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

外力の境界条件式は次式のようになる。

$$\phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\phi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = i\int\left(P_x + iP_y\right)ds$$

変位の境界条件式は次式のようになる。

$$\kappa\phi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\phi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} + 2G\alpha'\int\Psi(\sigma)\omega'(\sigma)d\sigma = 2G(u+iv)$$

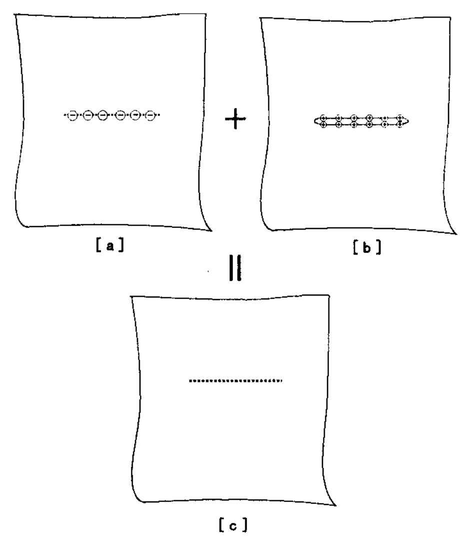

図1　全体の流れ

## 3．無限領域内に存在する点熱源の応力解析

無限領域内（孔なし）に存在する点熱源の温度関数 $\Omega(z)$ は、次式となる。

$$\Omega(z) = -\frac{M}{2\pi k}log\left(z - z_a\right)$$

ここでは熱源の座標 $z_a$ の強さを $M$ で表す。複素応力関数は次式となる。

$$\phi(z) = \frac{\alpha MGR}{4\pi k}\left(z - z_a\right)\left\{log\left(z - z_a\right) - 1\right\} \qquad \psi(z) = -\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\overline{z_a}\,log\left(z - z_a\right)$$

## 4．クラックを有する無限板の応力解析

複素熱関数を用いて境界条件式は次式となる。

$$\Psi(\sigma) - \tilde{m}\overline{\Psi(\sigma)} = const \qquad (\tilde{m}=1\ ：断熱条件、\tilde{m}=-1\ ：等温条件)$$

解析領域での発生熱源の座標を $\zeta_a$（強さ：$M$）、吸収熱源が無限遠点に存在する場合の複素熱関数を求める。

求めたい複素熱関数 $\Psi(\zeta)$ を次式でおく。

$$\Psi(\zeta)=\Psi_1(\zeta)+\Psi_2(\zeta) \qquad \Psi_1(\zeta)=-\frac{M}{2\pi k}log(\zeta-\zeta_a)$$

境界条件式の両辺に $\dfrac{d\sigma}{2i\pi(\sigma-\zeta)}$ を乗じてコーシー積分をして $\Psi_2(\zeta)$ を得た後 $\Psi(\zeta)$ は次式で表される。

$$\Psi(\zeta)=-\frac{M}{2\pi k}\left\{log(\zeta-\zeta_a)+\tilde{m}\,log\left(\frac{\zeta-\zeta_a}{\zeta}\right)\right\}+const$$

変位の境界条件式の第４項は複素熱関数による変位を表す項であり、孔を有する無限板の場合は複素熱関数による変位を表す項に含まれる多価関数（$log$ に関する項）により,変位の食い違いを生じる。しかし、変位は１価であるという条件を満たすため、この多価関数を打ち消す関数を考える。求めたい複素応力関数は次式で得られる。

$$\phi(\zeta)=\phi_1(\zeta)+\phi_2(\zeta) \qquad \psi(\zeta)=\psi_1(\zeta)+\psi_2(\zeta)$$

$$\phi_1(\zeta)=\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\left[\{\omega(\zeta)-\omega(\zeta_a)\}\{log(\zeta-\zeta_a)-1\}\right]+A\,log\,\zeta \qquad \psi_1(\zeta)=-\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\left[\overline{\omega(\zeta_a)}log(\zeta-\zeta_a)\right]+B\,log\,\zeta$$

$$A=-\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\left\{-\tilde{m}E_0\zeta'_a+\frac{E_1}{\zeta_a}\right\} \qquad B=\overline{A}=\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\left\{-\tilde{m}\overline{E_0\zeta'_a}+\frac{\overline{E_1}}{\overline{\zeta_a}}\right\}$$

$$\phi_2(\zeta)=-\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\left[\{\omega(\zeta)-\omega(\zeta_a)\}log\left(\frac{1}{\zeta}-\overline{\zeta_a}\right)-E_0\zeta\,log\left(-\overline{\zeta_a}\right)+\frac{E_1}{\zeta}log(-\zeta_a)-\frac{E_1}{\zeta}\ \right]+const$$

$\psi(\zeta)$ は外力境界上の解析接続より求められる。従って $\phi(\zeta)$ は

$$\phi(\zeta)=A\,log\,\zeta+\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\left[\{\omega(\zeta)-\omega(\zeta_a)\}\{log(\zeta-\zeta_a)-1\}\right]$$

$$-\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\left[\{\omega(\zeta)-\omega(\zeta_a)\}log\left(\frac{1}{\zeta}-\overline{\zeta_a}\right)-E_0\zeta\,log\left(-\overline{\zeta_a}\right)+\frac{E_1}{\zeta}log(-\zeta_a)-\frac{E_1}{\zeta}\ \right]+const$$

$$\psi(\zeta)=-\overline{\phi\left(1/\overline{\zeta}\right)}-\frac{\overline{\omega\left(1/\overline{\zeta}\right)}}{\omega'(\zeta)}\phi'(\zeta)$$

境界上に発生熱源が作用する場合は、熱源の座標。を $\sigma_a$ として、上述の $\phi(\zeta)$ の式に $\zeta_a=\sigma_a$ を代入し、$\overline{\sigma_a}=1/\sigma_a$ の関係式を用いると、次式が得られる。

$$\phi(\zeta)=\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\left[\ \{\omega(\zeta)-\omega(\sigma_a)\}\,log\,\zeta-E_0\,\zeta\ \right]+A\,log\,\zeta$$

ここで、上式から判るように、熱源の位置 $\zeta=\sigma_a$ は応力特異点にはならない。

５．残留応力の解析

３、４で求めた応力関数を用いて、それぞれの応力成分を求めその和をとることにより残留応力を求める（図１）。図１ $[a]$ は無限盤中の負の熱源の分布、図２ $[b]$ はクラック面上の正の点熱源の分布を表し、これらを重ね合わせ、図 $[c]$ の残留応力を得ることができる。