

地盤変形定数の新しい逆解析法：

ベイズ法と特異値分解法の融合

岐阜大学工学部 学生員 ○加藤 幸介

岐阜大学工学部 正会員 本城 勇介

1.はじめに

地盤工学における逆解析問題は、逆解析を成功させる(解を得る)ことが非常に困難な場合が多い。これは、一般的にモデルパラメータより観測データが少ないこと、得られた観測データの場合、何らかの偏りが存在するためである。これは、逆解析の不適切性または、データの共線性と言われる。

地盤工学の分野から、ジオ・トモグラフィーを例に逆解析について考える。

本研究は、地盤工学で出会う個々の逆解析問題の不適切性の度合いを判断する道具としての一般逆行列の理論と特異値分解の適用について研究したものである。特に、この方法で事前情報の利用について考察する予定である。問題を具体的に考えるため、ここでは弾性波ジオ・トモグラフィーを例題とする。

2.研究の内容

ジオ・トモグラフィーでは、多くの測線について最早到達時間を測定する。地盤内の弾性波の直進性を仮定すると、次式が得られる。

$$y = X\theta + \varepsilon \quad (1)$$

ここに、 y :観測値(最早到達時間)ベクトル

θ :モデル・パラメータ・ベクトル

ε :誤差ベクトル

X :観測行列。観測行列 X_{ij} は、第 i 測線の第 j セルについての切片の長さに対応している。

このような行列方程式を解く一般的な方法として、一般逆行列の理論がある。 X を $n \times m$ 行列とすると、そのムーア・ペンローズの一般逆行列は、 X^- で表し、 $m \times n$ 行列であり、次の4つの性質を満たす。

- I. $(XX^-)^T = XX^-$ II. $(X^-X)^T = X^-X$
- III. $XX^-X = X$ IV. $X^-XX^- = X^-$

このような、 X^- を用いることにより、図-2に2次元の場合に概念的に示すようなすべての場合に、 $\theta_0 = X^-Y$ は何らかの有意な解を与える。それぞれの場合の条件を示す式は図-3のフローチャートに示してある。すなわち、(a)正則解、(b)不定解の場合のノルム最小解、(c)最小二乗解、(d)最小二乗解が不定のときのノルム最小解。

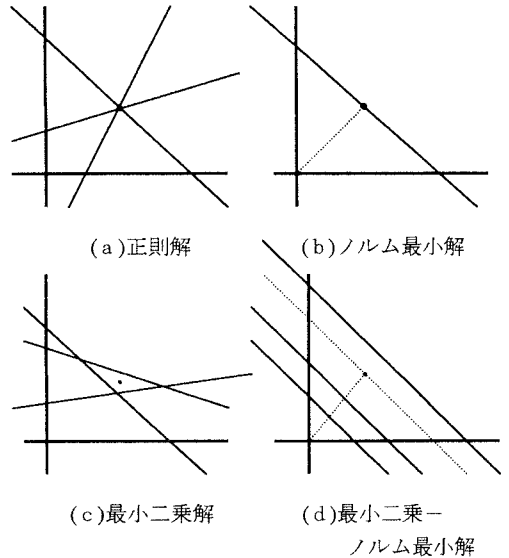


図-1 各種解の概念図

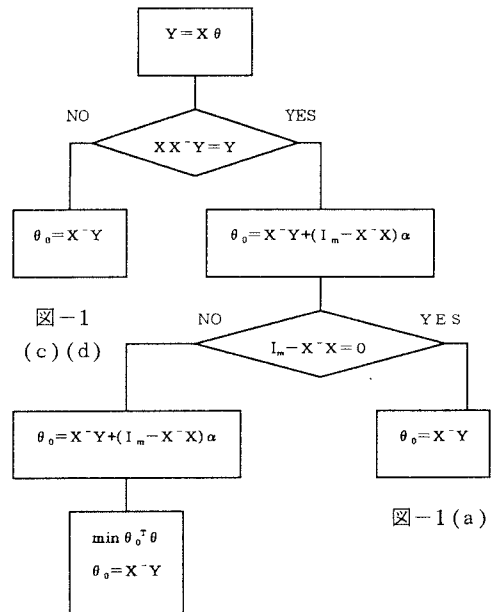


図-1(a)

図-1(b)

図-2 フローチャート

ここで、例題を用いて具体的に考察する。図-3 に例題とした、9 個のセルによりなるジオ・トモグラフィーの場合を示した。この時、図に示すような 9 本の測線があると、観測行列 X は図-4 のように与えられる。 y は、 $\theta^T = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ として求めた。

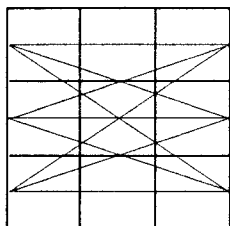


図-3 弾性波ジオ・トモグラフィー

1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.05	0.53	0.00	0.00	0.53	1.05	0.00	0.00	0.00
0.90	0.00	0.00	0.30	1.20	0.30	0.00	0.00	0.90
0.00	0.53	1.05	1.05	0.53	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	1.05	0.53	0.00	0.00	0.53	1.05
0.00	0.00	0.90	0.30	1.20	0.30	0.90	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.53	1.05	1.05	0.53	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	1.00

図-4 観測行列 X

ところで、この場合の $y = X\theta$ が図-1 に示した、どの場合に該当するかを知ることは容易ではない。これを知る方法が、特異値分解である。

観測行列 X 、及び観測行列 X の一般逆行列 X^- を特異値分解すると、次式が得られる。

$$X = U M V^T$$

$$X^- = V M^{-1} U^T \quad (2)$$

観測行列 X の特異値分解によって得られた特異値を

表-1 観測行列 X の特異値

μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8	μ_9
3.430	2.160	1.826	1.732	1.654	1.051	2.29E-16	1.63E-16	4.29E-17

表-2 有効 rank 数による結果

有効ランク	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8	θ_9
9	-3.21E+12	2.82E+12	3.91E+11	5.94E+11	-4.79E+12	4.19E+12	4.40E+12	-1.24E+13	8.00E+12
8	-3.12E+12	-1.59E+12	4.71E+12	-2.45E+12	-2.92E+12	5.37E+12	-1.79E+12	-4.25E+12	6.04E+12
7	8.63E+11	-1.32E+12	4.59E+11	6.12E+11	-8.19E+11	2.08E+11	3.61E+11	-3.18E+11	-4.31E+10
6	2.001	1.998	2.001	4.998	5.006	4.998	8.002	7.998	8.002

表-1 に示す。

表-1 から、特異値 μ_7 、 μ_8 、 μ_9 が、逆解析の不適切性を示す不安定要素と考えられる。一般逆行列 X^- を求めるとき、対角行列である M の逆行列を求めることで、値の小さい不安定要素だと思われていた要素が、値の大きい不安定要素として、解に大きな悪影響を及ぼす。そのため、この悪影響を及ぼすと考えられる不安定要素を取り除き、有効なランク数を小さくすることで、各々の場合の θ_0 を算出する。その計算結果を表-2 のように得た。

表-2 から特異値分解による特異値で示される不安定要素が、1 つでも含まれると推定する θ の値に大きな悪影響を及ぼす。しかし、特異値で示される不安定不安定要素をすべて取り除くことによって、推定する θ の値は安定した。また、この解がノルム最小解であることも分かる。

3. まとめ

例題を通じて理解されるように、観測行列の性質は、解に大きな影響を与える。行列の正則性、一次独立の検討により、安定な解が得られるかどうか判断できる。そして、特異値分解は問題の不適切性の度合いを調べるのに有効な方法である。本質的に 0 と考えられる特異値を落とした解は、ノルム最小解である。しかし、ノルム最小解が物理的に最も優位な解であるわけではなく、これには事前情報の導入が必要である。この場合の計算結果は、発表時にゆずる。

参考文献

本城勇介(1996)：地盤工学で逆解析はなぜむずかしいか：マトリックス方程式の解法として見た逆解析土と基礎 44-7