ミクロ非均質性を有する岩質材料の弾粘塑性均質化解析

名古屋大学大学院工学研究科　学生　○岡本 康伸
名古屋大学工学部　正会員　清木 隆文
名古屋大学工学部　正会員　市川 康明

1. はじめに

近年需要の高まっている地下空間の利用に対して、地下深部を構成する岩盤材料の長期的な挙動を正確に把握することは必要不可欠である。一般に、岩盤を構成する岩質材料はその変形・破壊過程において非線形性と時間依存性を有する複雑な挙動を示す。その挙動を正確に把握するためには微視的な構造まで考慮する必要がある。本論文では岩質材料から成る構造物を弾断粘塑性体と仮定して均質化法[1]を導入し、時間依存性数値解析を試みる。

2. 弾粘塑性体の均質化法

均質化法とは微視的には非均質な構造が周期的かつ規則的に配列された物体に対して、その構造を反映した巨視的な材料定数を求め、それを用いた全体解析から微視的な挙動を求めることができる数学理論である。

弾粘塑性体に対してのつり合い式、ひずみ変位関係、境界条件、構成則は以下のような時間区分 $[t, t+\Delta t]$ についての増分形で記述される。ここで Δ は現段階と前段階との差、添字 (n) は n 番目の計算ステップにおける値、添字 $(*)$ は前段階の状態を表す。

つり合い式

$$\frac{\partial \Delta\sigma_{ij}^{\varepsilon(n)}}{\partial x_j} + \Delta f_i^{\varepsilon(n)} + \left(f_i^{*\varepsilon(n)} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{*\varepsilon(n)}}{\partial x_j} \right) = 0 \qquad \text{in } \Omega^\varepsilon \tag{1}$$

ひずみ － 変位関係

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{(n)}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta u_i^{\varepsilon(n)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j^{\varepsilon(n)}}{\partial x_i} \right) \tag{2}$$

境界条件

$$\Delta\sigma_{ij}^{\varepsilon} n_j = \Delta F_i(\boldsymbol{x};t) \quad \text{on } \partial\Omega_t^\varepsilon \ , \quad \Delta u_i^\varepsilon = \Delta \bar{u}_i(\boldsymbol{x};t) \quad \text{on } \partial\Omega_u^\varepsilon \tag{3}$$

構成則

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{ij}^{(n)} &= \bar{D}_{ijkl}^{(n)}\, \Delta\varepsilon_{kl}^{(n)} - \Delta\sigma_{ij}^{vp(n)} \\ \Delta\sigma_{ij}^{vp(n)} &= \bar{D}_{ijkl}^{(n)}\, \Delta\varepsilon_{kl}^{vp(n)} \\ \bar{D}_{ijkl}^{(n)} &= \left\{ \delta_{oi}\delta_{pj} + \theta\Delta t D_{ijqr}^{(n)} \left(\frac{\partial \varepsilon_{qr}^{vp(n)}}{\partial \sigma_{op}^{(n)}} \right) \right\}^{-1} D_{opkl}^{(n)} \end{aligned} \tag{4}$$

均質化理論において、変位をつぎのように漸近展開する。

$$\Delta u_i^\varepsilon(\boldsymbol{x};t) = \Delta u_i^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t) + \varepsilon\Delta u_i^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t) + \varepsilon^2\Delta u_i^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t) + \cdots \tag{5}$$

ここで、局所座標 $\boldsymbol{y}$ についての周期性 (Y-periodic) を以下のように考慮する。

$$\Delta u_i^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t) = \Delta u_i^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{Y};t) \qquad (\alpha = 0,1,2,\cdots) \tag{6}$$

さらに、微分演算子が $\dfrac{d}{dx_i} \Longrightarrow \dfrac{\partial}{\partial x_i} + \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial y_i}$ となることに注意して、式(3) を展開すると以下のようになる。

$$\Delta\varepsilon_{ij}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\Delta\varepsilon_{ij}^{0y} + [\Delta\varepsilon_{ij}^{0x} + \Delta\varepsilon_{ij}^{1y}] + \varepsilon[\Delta\varepsilon_{ij}^{1x} + \Delta\varepsilon_{ij}^{2y}] + \cdots \tag{7}$$

ただし　$\Delta\varepsilon_{ij}^{\alpha x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \Delta u_i^\alpha}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \Delta u_j^\alpha}{\partial x_i} \right)$, $\Delta\varepsilon_{ij}^{\alpha y} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \Delta u_i^\alpha}{\partial y_j} + \dfrac{\partial \Delta u_j^\alpha}{\partial y_i} \right)$ 　$(i,j = 1,2,3;\ \ \alpha = 0,1,\cdots)$

また応力についても、ひずみに対応した形で表せられる。

$$\Delta\sigma^{\varepsilon}_{ij}(\boldsymbol{x};t)=\frac{1}{\varepsilon}\Delta\sigma^{0}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t)+\Delta\sigma^{1}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t)+\varepsilon\Delta\sigma^{2}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t)+\cdots \tag{8}$$

<u>微視問題($O(\varepsilon^{-1})$項)</u>：局所系における

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left\{\bar{D}^{\varepsilon}_{ijkl}(\Delta\varepsilon^{0x}_{kl}+\Delta\varepsilon^{1y}_{kl})-\Delta\sigma^{vp}_{ij}\right\}=0 \tag{9}$$

が得られる。式(9)を周期条件式(6)のもとに弱形式化すると、

$$\int_Y \bar{D}^{\varepsilon}_{ijkl}\Delta\varepsilon^{1y}_{kl}\frac{\partial V_i(\boldsymbol{y})}{\partial y_j}dy=\left\{\int_Y \bar{D}^{\varepsilon}_{ijkl}\frac{\partial V_i(\boldsymbol{y})}{\partial y_j}dy\right\}\Delta\varepsilon^{0x}_{kl}-\int_Y \Delta\sigma^{vp}_{ij}\frac{\partial V_i(\boldsymbol{y})}{\partial y_j}dy \tag{10}$$

となる。ここで、$V_i(\boldsymbol{y})$ はY-periodic な任意関数である。
また、局所形における特性関数を

$$\Delta u^1_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t)=\chi^{pq}_k(\boldsymbol{y};t)\frac{\partial\Delta u^0_p}{\partial x_q}+c(\boldsymbol{x}) \tag{11}$$

と定義すると、ユニットセルにおける微視的問題が以下のように得られる。

$$\left[\int_Y(\bar{D}^{(n)}_{ijop}\frac{\partial\chi^{kl(n)}_o}{\partial y_p}-\bar{D}^{(n)}_{ijkl})\frac{\partial V_i}{\partial y_j}\,dY\right]\Delta\varepsilon^{0x}_{kl}\;=\;-\int_Y\Delta\sigma^{vp}_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial y_j}dY \tag{12}$$

これより χ^{kl}_o を得る。
<u>巨視問題($O(\varepsilon^0)$項)</u>：ε^0 の項にユニットセルに対する平均化$<\bullet>=\dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_Y\bullet dy$ を施すとつぎの巨視問題が得られる。ここで D^H_{ijkl} はミクロな幾何構造を反映したマクロな定数であることから均質化弾性定数とよばれる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial\{D^H_{ijkl}\Delta\varepsilon^{0x}_{kl}\}}{\partial x_j}&=\frac{\partial<\Delta\sigma^{vp}_{ij}>}{\partial x_j}-<\Delta f^{\varepsilon}_i>-<f^{*\varepsilon}_i>-\frac{\partial<\sigma^{*\varepsilon}_{ij}>}{\partial x_j}\\ D^H_{ijkl}&=\frac{1}{|Y|}\int_Y(\bar{D}^{(n)}_{ijkl}+\bar{D}^{(n)}_{ijop}\frac{\partial\chi^{kl(n)}_o}{\partial y_p})\,dY\\ \Delta\sigma^{\varepsilon}_{ij}n_j&=\Delta F_i(\boldsymbol{x};t)\;,\;\Delta u^{\varepsilon}_i=\Delta\bar{u}_i(\boldsymbol{x};t)\quad(B.C.)\end{aligned} \tag{13}$$

式(13)を弱形式化すると、

$$\begin{aligned}\int_\Omega D^{H(n)}_{ijkl}\Delta\varepsilon^{0x(n)}_{kl}\frac{\partial\,v_i}{\partial\,x_j}dv\;=\;&\int_\Omega\left[\frac{\partial<\Delta\sigma^{vp(n)}_{ij}>}{\partial x_j}-<\Delta f^{\varepsilon(n)}_i>-<f^{*\varepsilon(n)}_i>-\frac{\partial<\sigma^{*\varepsilon(n)}_{ij}>}{\partial x_j}\right]v_i\,dv\\&+\int_{\partial\Omega}\Delta F_iv_idS\qquad\forall v_i(v_i=0\quad on\quad\partial\Omega_u)\end{aligned} \tag{14}$$

3. 数値解析

式(7)について$\varepsilon\to0$とすることにより、材料の平均的なひずみが $\Delta\varepsilon^{\varepsilon}_{ij}\simeq\Delta\varepsilon^{0x}_{ij}+\Delta\varepsilon^{1y}_{ij}$ となる。各ステップごとに微視的方程式(12)より特性関数 χ^{kl}_o を求め、D^H_{ijkl} を決定する。その D^H_{ijkl} を用い、巨視方程式(14)を離散化し有限要素法を導入して$\Delta\varepsilon^{0x}_{kl}$を解き、引き続き式(11)より$\Delta\varepsilon^{1y}_{kl}$を求めることでステップごとの時間依存を考慮した平均的なひずみが計算される。ただし、式(13)の右辺第一項は荷重の粘塑性項を表し超過応力関数による降伏判定を行うことで計算される。

<u>参考文献</u>

1) E.Sanchez-Palencia: Non-homogeneous media and vibration theory; Lecture notes in phisics, Springer-Verlag, 1980

2) 田口 知寛: 均質化法を用いた弾粘塑性地盤の数値解析, 修士論文, 名古屋大学,1997年