岩質材料の長期挙動に関する粘弾性均質化解析

名古屋大学大学院工学研究科　学生員　○藤井 直樹
名古屋大学大学院工学研究科　正会員　清木 隆文
名古屋大学大学院工学研究科　正会員　市川 康明

1. はじめに

近年、地下空間への需要が高まり地盤材料の研究が重要視されている。一般に地盤材料が時間依存変形挙動や残留変形を伴う非線形挙動を示すことはよく知られている。本研究では、構成モデルを一般化マックスウェルモデルで表せる粘弾性体とし、均質化法(Homogenization Method)[1]を用いた時間依存性数値解析を試みる。

2. 粘弾性体への均質化法の適用

均質化法はミクロレベルで非均質な構造が周期的かつ規則的に配列された物体に対して、その構造を反映したマクロレベルの材料定数を求め、さらにマクロな解析解からミクロな解を求めることができる理論である。粘弾性問題については弾性・粘弾性対応原理[2]よりラプラス変換を施した支配方程式を弾性問題と相似な形で解くことができるが、本研究においては、増分形の定式化によりラプラス変換を用いずに解を求めることとした。

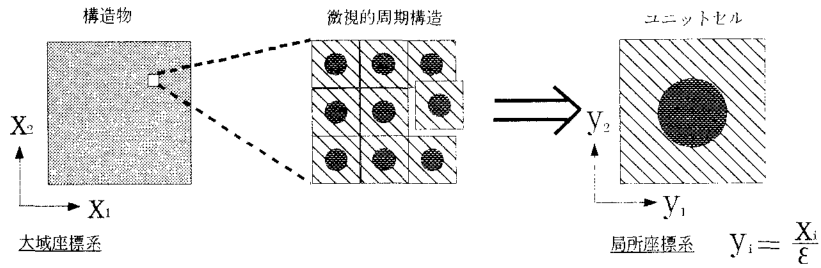

図1 均質化法の概念

粘弾性問題に対し時間区分 $[t, t+\Delta t]$ について記述すると

つり合い式

$$\frac{\partial \Delta\sigma_{ij}^{\varepsilon}}{\partial x_j} + \Delta f_i^{\varepsilon} + \left(f_i^{*\varepsilon} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{*\varepsilon}}{\partial x_j} \right) = 0 \qquad \text{in } \Omega^{\varepsilon} \tag{1}$$

構成則　一般化マックスウェルモデルによる構成方程式は離散系で次のように書ける。

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_{ij} &= 2\hat{G}\,\Delta e_{ij} + 3\hat{K}\,\Delta\bar{\varepsilon}_{ij} - \Delta s_{ij}^{v} - \Delta\bar{\sigma}_{ij}^{v} = \bar{D}_{ijkl}\,\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\sigma_{ij}^{v} \\
\hat{G} &= G_0 + \frac{\eta_\infty^s}{\Delta t} + \sum_i \frac{G_i}{\Delta t}\left(1 - \exp\left(-\Delta t/\tau_i^s\right)\right) \\
\hat{K} &= K_0 + \frac{\eta_\infty^s}{\Delta t} + \sum_i \frac{K_i}{\Delta t}\left(1 - \exp\left(-\Delta t/\tau_i^v\right)\right) \\
\Delta s_{ij}^{v} &= 2\frac{\eta_\infty^s}{\Delta t}\Delta e_{ij}^{*} + \sum_i \left(1 - \exp\left(-\Delta t/\tau_i^s\right)\right) s_{ij}^{*} \\
\Delta\bar{\sigma}_{ij}^{v} &= 2\frac{\eta_\infty^s}{\Delta t}\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}^{*} + \sum_i \left(1 - \exp\left(-\Delta t/\tau_i^v\right)\right) \bar{\sigma}_{ij}^{*}
\end{aligned} \tag{2}$$

ここで$\hat{G}$はせん断緩和関数、$\hat{K}$は体積緩和関数であり、それぞれ第1項目は瞬間弾性的な性質、第2項目は粘性流体的な性質、第3項目は応力緩和を示す性質を表す。また、$\bar{\sigma}_{ij}$、s_{ij}は体積応力、偏差応力を、$\bar{\varepsilon}_{ij}$、e_{ij}は体積ひずみ、偏差ひずみを示す。

以上、粘弾性問題に対し支配方程式が導かれたので均質化理論を導入するとユニットセルにおける微視問題と、全体構造物における巨視問題についてそれぞれつぎの微分方程式が得られる。

微視問題(ユニットセル)：局所系における

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left\{\bar{D}^{\varepsilon}_{ijkl}(\Delta\varepsilon^{0x}_{kl}+\Delta\varepsilon^{1y}_{kl})-\Delta\sigma^{v}_{ij}\right\}=0 \tag{3}$$

が得られる。式(3)を弱形式化すると、

$$\int_Y \bar{D}^{\varepsilon}_{ijkl}\Delta\varepsilon^{1y}_{kl}\frac{\partial V_i(\boldsymbol{y})}{\partial y_j}dy=\left\{\int_Y \bar{D}^{\varepsilon}_{ijkl}\frac{\partial V_i(\boldsymbol{y})}{\partial y_j}dy\right\}\Delta\varepsilon^{0x}_{kl}-\int_Y \Delta\sigma^{v}_{ij}\frac{\partial V_i(\boldsymbol{y})}{\partial y_j}dy \tag{4}$$

となる。ここで、$V_i(\boldsymbol{y})$ はY-periodic な任意関数である。
また、マクロとミクロを結ぶ局所形における特性関数 χ^{pq}_k を

$$\Delta u^1_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t)=\chi^{pq}_k(\boldsymbol{y};t)\frac{\partial\Delta u^0_p}{\partial x_q}+c(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

と定義すると、ユニットセルにおける微視的問題が以下のように得られる。

$$\left[\int_Y(\bar{D}^{(n)}_{ijop}\,\frac{\partial\chi^{kl(n)}_o}{\partial y_p}-\bar{D}^{(n)}_{ijkl})\frac{\partial V_i}{\partial y_j}\,dY\right]\Delta\varepsilon^{0x}_{kl}\;=\;-\int_Y\Delta\sigma^{v}_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial y_j}dY \tag{6}$$

これより χ^{kl}_o を得る。
巨視問題(全体構造物)：ユニットセルに対する平均化 $<\bullet>=\frac{1}{|Y|}\int_Y\bullet dy$ を施すとつぎの巨視問題が得られる。ここで D^H_{ijkl} はミクロな幾何構造を反映したマクロな定数であることから均質化弾性定数とよばれる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial\{D^H_{ijkl}\Delta\varepsilon^{0x}_{kl}\}}{\partial x_j}&=\frac{\partial<\Delta\sigma^{v}_{ij}>}{\partial x_j}-<\Delta f^{\varepsilon}_i>-<f^{*\varepsilon}_i>-\frac{\partial<\sigma^{*\varepsilon}_{ij}>}{\partial x_j}\\ D^H_{ijkl}&=\frac{1}{|Y|}\int_Y(\bar{D}_{ijkl}+\bar{D}_{ijop}\,\frac{\partial\chi^{kl}_o}{\partial y_p})\,dY\end{aligned} \tag{7}$$

式(7)を弱形式化すると、

$$\begin{aligned}\int_\Omega D^{H(n)}_{ijkl}\Delta\varepsilon^{0x(n)}_{kl}\frac{\partial\,v_i}{\partial\,x_j}dv&=\int_\Omega\left[\frac{\partial<\Delta\sigma^{v}_{ij}>}{\partial x_j}-<\Delta f^{\varepsilon}_i>-<f^{*\varepsilon}_i>-\frac{\partial<\sigma^{*\varepsilon}_{ij}>}{\partial x_j}\right]v_i\,dv\\&+\int_{\partial\Omega}\Delta F_i v_i dS\qquad\forall v_i(v_i=0\quad on\quad\partial\Omega_u)\end{aligned} \tag{8}$$

3. 数値解析

微視的周期構造のスケール $\varepsilon\to 0$ とすることにより、材料の平均的なひずみが $\Delta\varepsilon^{\varepsilon}_{ij}\simeq\Delta\varepsilon^{0x}_{ij}+\Delta\varepsilon^{1y}_{ij}$ となる。各ステップごとに微視的方程式(6)より特性関数 χ^{kl}_o を求め、D^H_{ijkl} を決定する。その D^H_{ijkl} を用い、巨視方程式(8)を離散化し有限要素法を導入して$\Delta\varepsilon^{0x}_{kl}$を解き、引き続き式(5)より$\Delta\varepsilon^{1y}_{kl}$を求めることでステップごとの時間依存を考慮した平均的なひずみが計算される。

参考文献

1) E.Sanchez-Palencia: Non-homogeneous media and vibration theory; Lecture notes in phisics. Springer-Verlag. 1980

2) 草間孝志、三井康司、吉田俊弥: 数値ラプラス逆変換による線形粘弾性解析; 土木学会論文報告集. 第292号,pp.41-52.1979年12月

3) Jian-Guo Wang: A Homogenization Theory for Geomaterials.Nonlinear Effect and Water Flow ; Doctoral thesis in Nagoya Univ.,1996