

## 平面波浪場の波形諸量に及ぼす3次干渉の影響

岐阜大学 学生会員 ○河合篤司 大宮雄一 正会員 安田孝志

### 【1. 緒言】

海の波は本質的に3次元であるが、これまで理論展開や観測の困難さから鉛直2次元場で主に取り扱われてきた。これは、水の波の理論が鉛直2次元で展開され、一定の成果を挙げてきたことにも原因しており、ポテンシャル理論による流体力学の発展と限界に通じるところがある。確かに、時間波形を扱う限り、波の3次元性は問題とならないが、海面境界過程として海の波を捉えようとするなら、3次元の取扱いとは必須となる。

ここでは、こうした海の波の3次元の取扱いの第一歩として、波を非碎波とし、ポテンシャル理論による取扱いを行い、波高分布に重要な海面の尖鋭度を支配する3次干渉の平面波形に及ぼす影響について検討する。

### 【2. 数値的解法】

Dommermuth & Yue<sup>1)</sup> に従い、3次干渉まで厳密に評価した平面波浪場 (図-1) の支配方程式として次式を用いる。

$$\eta_t = -\phi_x^s \eta_x - \phi_y^s \eta_y + (1 + \eta_x^2 + \eta_y^2) \phi_z|_{\eta} = 0 \quad (1)$$

$$\phi_t^s = -g\eta - \frac{1}{2}(\phi_x^{s2} + \phi_y^{s2}) + \frac{1}{2}(1 + \eta_x^2 + \eta_y^2) \phi_z|_{\eta} = 0 \quad (2)$$

ここに、 $\phi^s$  は水面  $z = \eta(x, y, t)$  での速度ポテンシャルであり、 $\phi_z|_{\eta}$  は深海波に対して次式のようになる。

$$\phi_z|_{\eta} = \sum_{m=1}^3 \sum_{l=0}^{3-m} \frac{\eta^l}{l!} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (k_{ij})^{l+1} \phi_{ij}^{(m)}(t), \quad k_{ij} = [k_{xi}^2 + k_{yj}^2]^{1/2} \quad (3)$$

$\phi_{ij}^{(m)}(t)$  と  $\phi^s$  の関係は次式より得られる。

$$\phi^s = \sum_{m=1}^3 \sum_{l=0}^{3-m} \frac{k^l \eta^l}{l!} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (k_{ij})^l \phi_{ij}^{(m)}(t) \quad (4)$$

初期波の方向スペクトル  $S(f, \theta)$  より、初期波形  $\eta(x, y, 0)$  および速度ポテンシャル  $\phi^s(x, y, 0)$  を生成し、擬似スペクトル法によって式 (1) および (2) を解く。

$$\eta(x, y, 0) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_{ij} \cos(k_i \cos \theta_j x + k_i \sin \theta_j y + \varepsilon_{ij}) \quad (5)$$

$$a_{ij} = \left[ \frac{8\pi^2}{g^2} f_i^3 S(f_i, \theta_j) \Delta f \Delta \theta \right]^{1/2}, \quad k_i = 4\pi^2 f_i^2 / g, \quad \theta_j = 2\pi j / J$$

### 【3. 解析的解法】

式 (1) および (2) をそのまま解析的に解くことはできないが、単に2次および3次補正の影響を考慮した瞬間的な平面波形を知るだけであれば、摂動展開によって近似的に解くことはできる。

これら両式を波数空間上で取り扱うため、Stiassnie & Shemer<sup>2)</sup> に従い、フーリエ変換

$$\hat{\eta}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (x, y), \mathbf{k} = (k_x, k_y) \quad (6)$$

$$\hat{\phi}^s(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^s(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (7)$$

によって、 $\hat{\eta}$  および  $\hat{\phi}^s$  に関する方程式に書き換える。

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_t(\mathbf{k}) &= kh\hat{\phi}^s(\mathbf{k}) - \int \int_{-\infty}^{\infty} [k_1(k_1 - k) - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2] \hat{\phi}^s(\mathbf{k}_1) \hat{\eta}(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} (S_{0,1,2,3,4} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3) \hat{\phi}^s(\mathbf{k}_1) \hat{\eta}(\mathbf{k}_2) \hat{\eta}(\mathbf{k}_3) \hat{\phi}^s(\mathbf{k}_1) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_t^s(\mathbf{k}) &= -g\hat{\eta}(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \int \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + k_1 k_2) \hat{\phi}^s(\mathbf{k}_1) \hat{\phi}^s(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} (R_{0,1,2,3} \hat{\phi}^s(\mathbf{k}_1) \hat{\phi}^s(\mathbf{k}_2) \hat{\eta}(\mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \end{aligned} \quad (9)$$

ここで,  $k_i = |k_i|$ ,  $\omega_i = \sqrt{gk_i}$

$$S_{0,1,2,3,4} = \frac{\omega_0^2 k_1}{4g} [2k - \frac{1}{g} (\omega_{12}^2 + \omega_{13}^2 + \omega_{0-2}^2 + \omega_{0-3}^2)] - \frac{\omega_1^2}{4g} (2k^2 - |k_1 + k_2| - |k_1 + k_3| - |k - k_2| - |k - k_3|) \quad (10)$$

$$R_{0,1,2,3} = \frac{k_1 k_2}{4} [2k_1 + 2k_2 - \frac{1}{g} (\omega_{13}^2 + \omega_{23}^2 + \omega_{0-1}^2 + \omega_{0-2}^2)] \quad (11)$$

共鳴による不安定がなければ, フーリエ係数 $\hat{\eta}$ および $\hat{\phi}^s$ についても漸近性を有すと仮定でき, 次式のように摂動展開を行う.

$$\hat{\eta} = \sum_{n=0} \varepsilon^n \hat{\eta}_n, \quad \hat{\phi}^s = \sum_{n=0} \varepsilon^n \hat{\phi}_n^s, \quad \omega = \sum_{n=0} \varepsilon^n \sigma_n \quad (12)$$

これを式 (8) および (9) に代入し, 摂動法に従って解けば, 波数空間上で3次干渉まで考慮した, ある瞬間 (簡単のために $t=0$ ) での $\hat{\eta}$ が次式のように導かれる.

$$\begin{aligned} \hat{\eta}(k) = & a(k) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(k_1, k-k_1) a(k_1) a(k-k_1) dk_1 \\ & + \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} C(k_1, k_2, k_3) a(k_1) a(k_2) a(k_3) dk_1 dk_2 \end{aligned} \quad (13)$$

ここで,  $k_3 = k - k_1 - k_2$ であり,  $A$ および $C$ は2次および3次の非線形核関数である.

#### 【4. 波形の表示】

波形 $\eta(x)$ は,  $S^*(f, \theta)$ を最低次のフーリエ係数  $a(k)$

$$a(k) = \left[ \frac{128\pi^6 f^3}{g^2} S^*(f, \theta) \Delta f \Delta \theta \right]^{1/2} \quad (14)$$

に変換し, これを式 (13) に代入して $\hat{\eta}(k)$ の計算を行い, さらにこれを逆変換することによって求める. 実際の計算では,

$$a_{ij} = (\Delta k_x \Delta y / \pi^2) \text{Re} [\hat{\eta}(k)]|_{k=(k_{xi}, k_{yj})} \quad (15)$$

によって $\hat{\eta}$ を実フーリエ係数 $a_{ij}$ に変換し, これを上述の式 (5) に代入して波形の表示を行う.

図-2は方向スペクトルとして光易型を用い,  $T_{1/3} = 8\text{s}$ ,  $H_{1/3} = 3.3\text{m}$ および $S_{max} = 10$ としたときの平面波形を示したものである.

#### 【5. 結語】

ここでは, 解析手法のみを示したが, 波形諸量への3次干渉の具体的な影響評価が今後の課題である. なお, 本計算において横尾真一君 (当時本学4年生) の卒業論文を参考にした. 記して謝意を表す.

#### 【参考文献】

- 1.) Dommermuth, D.G. and D.K.P.Yue(1987): A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves, J..Fluid Mech., Vol.184, pp.267-288.
- 2.) Stiassnie, M. and L.Shemer(1984): On modifications of the Zakharov equation for surface gravity waves, J..Fluid Mech., Vol.143, pp.47-67.

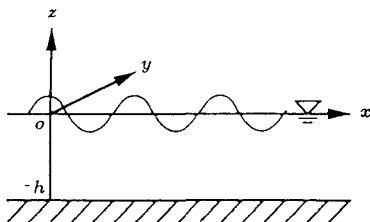


図-1 平面波浪場の座標

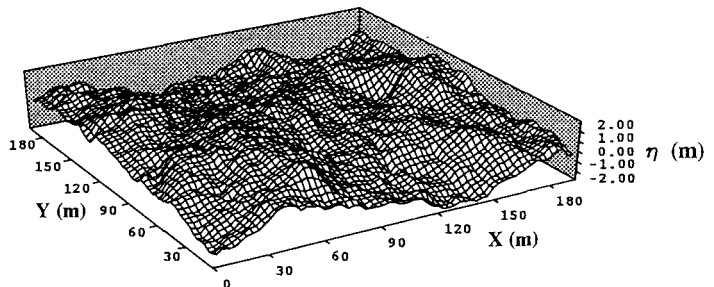


図-2 式 (13), (15) および (5) を用いて計算された平面波形