非定常な1変数最大エントロピー分布の提案

信州大学工学部　正会員　寒川典昭

1. はじめに

著者等は，従来，１変数[1]，２変数[2]，多変数[3]，及び条件付き[4]最大エントロピー分布を検討してきた．しかしながら，これらの分布はすべて定常頻度分析に用いるものであった．ところが，水文量の時系列を分析すると，そこには非定常性が存在する場合が多い．従って，非定常頻度分析をするには，上述の分布を非定常性を持つ分布に拡張しなければならない．本稿では，これら一連の研究の取り掛かりとして１変数最大エントロピー分布を対象とし，この分布のパラメータを時間とともに変化するように変形し，その同定法を理論的に展開した．

2. 理論式

2.1 分布形の導出法

時間 t に依存した確率変数を x(t)，その確率密度関数を p(x(t)) とすると，エントロピー H は次式で表される．

$$H=-\int p(x(t))\ln p(x(t))dx(t) \quad (1)$$

ここで，確率密度関数が具備すべき条件と，任意関数 $g_r(x(t))$ の期待値は次のように表現される．

$$\int p(x(t))dx(t)=1 \quad (2)$$

$$\int g_r(x(t))p(x(t))dx(t)=E[g_r(x(t))],\ r=1,2,\ldots,N \quad (3)$$

(2)，(3)式を制約条件として，(1)式を最大にする分布を求める．この分布は水文量から得られる情報は $g_r(\cdot)$ の期待値の形で取り入れ，それ以外はエントロピー，すなわち不確定さを最大にする分布である．水文量のような不確定さの大きい統計量に，このような分布を用いることは適切である．そこで上述の問題をラグランジュの未定乗数法で解く．ラグランジュ関数は

$$L=H+(\lambda_0(t)-1)\{1-\int p(x(t))dx(t)\}+\sum_{r=1}^{N}\lambda_r(t)\{E[g_r(x(t))]-\int g_r(x(t))p(x(t))dx(t)\} \quad (4)$$

となる．ここに，$\lambda_r(t)$ (r=1,2,...,N) はラグランジュ乗数である．そこで，(4)式の変分をとって"０"と置くと非定常な１変数最大エントロピー分布は次式のように求まる．

$$p(x(t))=exp\{-\lambda_0(t)-\sum_{r=1}^{N}\lambda_r(t)g_r(x(t))\} \quad (5)$$

2.2 パラメータ同定法

(5)式を(2)式に代入して，λ_0 に関して解くと次式が得られる．

$$\lambda_0=ln\{\int exp\{-\sum_{r=1}^{N}\lambda_r(t)g_r(t)\}\}dx(t) \quad (6)$$

(3)式の右辺を $\nu_r(t)$ と置いて，(5)式を(3)式に代入して(6)式を使って整理すると次式となる．

$$\int g_r(x(t))exp\{-\sum_{r=1}^{N}\lambda_r(t)g_r(x(t))\}dx(t)=\nu_r(t)\int exp\{-\sum_{r=1}^{N}\lambda_r(t)g_r(x(t))\}dx(t),\ r=1,2,\ldots,N \quad (7)$$

いま，$\lambda_r(t)$の近似値を$\alpha_r(t)$，残差を$\varepsilon_r(t)$と置くと

$\lambda_r(t)=\alpha_r(t)+\varepsilon_r(t)$ (8)

となる．そこで，(8)式を(7)式に代入すると

$$\int g_r(x(t))exp\{-\sum_{r=1}^{N}(\alpha_r(t)+\varepsilon_r(t))g_r(x(t))\}dx(t)=v_r(t)\int exp\{-\sum_{r=1}^{N}(\alpha_r(t)+\varepsilon_r(t))g_r(x(t))\}dx(t),\ r=1,2,\ldots,N \quad (9)$$

が得られる．(9)式を変形すると

$$\int g_r(x(t))exp\{-\sum_{r=1}^{N}\alpha_r(t)g_r(x(t))\}exp\{-\sum_{r=1}^{N}\varepsilon_r(t)g_r(x(t))\}dx(t)=v_r(t)\int exp\{-\sum_{r=1}^{N}\alpha_r(t)g_r(x(t))\}exp\{-\sum_{r=1}^{N}\varepsilon_r(t)g_r(x(t))\}dx(t),\ r=1,2,\ldots,N \quad (10)$$

が得られる．ここで，$\varepsilon_r(t)$は微少であるから，$\varepsilon_r(t)$に関してテーラー展開し，$\varepsilon_r(t)^2$以上の項を無視すると，(10)式より

$$\int g_r(x(t))exp\{-\sum_{r=1}^{N}\alpha_r(t)g_r(x(t))\}\{1-\sum_{r=1}^{N}\varepsilon_r(t)g_r(x(t))\}dx(t)=v_r(t)\int exp\{-\sum_{r=1}^{N}\alpha_r(t)g_r(x(t))\}\{1-\sum_{r=1}^{N}\varepsilon_r(t)g_r(x(t))\}dx(t),\ r=1,2,\ldots,N \quad (11)$$

が得られる．従って，(11)式を整理すると，次の$\varepsilon_j(t)$に関するN元連立1次方程式が得られる．

$$\sum_{j=1}^{N}(A_{i,j}(t)-v_i(t)A_{0,j}(t))\varepsilon_j(t)=A_{0,j}(t)-v_i(t)A_{0,0}(t),\ i=1,2,\ldots,N \quad (12)$$

ここで，

$$A_{i,j}(t)=\int g_i(x(t))g_j(x(t))exp\{-\sum_{r=1}^{N}\alpha_r(x(t))g_r(x(t))\}dx(t) \quad (13)$$

$g_0(x(t))=1$ (14)

としている．

3. あとがき

本稿では，非定常頻度分析に用いるために，定常な1変数最大エントロピー分布を非定常な分布に拡張した分布形を導出し，その分布のパラメータ同定法を示した．しかしながら，導出した分布の有効性については，まだ検討していない．今後は，定常な，2変数，多変数，及び条件付き最大エントロピー分布を非定常な分布に拡張するとともに，実データへの適用をはかり，最適な任意関数$g_r(x(t))$を見つけていき，これらの分布の有効性を検討したいと考えている．

【参考文献】

1)寒川，荒木：水文事象の頻度分析へのMEP導入について，土木学会論文報告集，第335号，pp.89-95，1983年.

2)寒川，荒木，寺島：2変数MEP分布とその特性に関する研究，第28回水理講演会論文集，pp.397-402，1984年.

3)寒川，荒木，佐藤：多変数最大エントロピー分布とその基礎特性に関する研究，土木学会論文集，第375号／Ⅱ-6，pp.89-98，1986年.

4)N. Sogawa, M. Araki, and T. Imai : STUDIES ON MULTIVARIATE CONDITIONAL MAXIMUM ENTROPY DISTRIBUTION AND ITS CHARACTERISTICS, JHHE, Vol.4, No.1, pp.79-97, 1986.