

小口径柱体周辺の3次元流体場の数値解析

金沢大学大学院 学生員○榎田真也

金沢大学工学部 正会員 石田 啓

金沢大学工学部 正会員 由比政年

1. はじめに

海洋構造物が受ける流体力やその周辺の流況を知ることは海岸工学上の基本課題の一つである。これに対し、一様流および振動流中に固定された柱体周りの流れについて、Wei(1986)らや Tatuno(1990)らの可視化実験によって、スパン方向の渦の発生が確認され、その3次元構造とレイノルズ数およびKC数との関連が明らかにされている。一方、数値解析では流体場に2次元性を仮定したものが多く、本質的に3次元構造を呈する流れを検討するには十分とはいえない。そこで本研究では、海洋構造物周辺の流況や流体力に関する基礎的研究の一環として、小口径円柱まわりの一様流および振動流場に関し、一般曲線座標系に変換した非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を差分法を用いて解き、物体まわりの流れのパターン、流れの3次元構造、そして物体に作用する流体力等に関する検討を行う。

2. 基礎方程式

非圧縮性粘性流体の運動に対する基礎方程式は、次に示す連続式および Navier-Stokes 方程式で表される。

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta \mathbf{u} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{u}$ は速度ベクトル、 p は圧力および Re は Reynolds 数である。非圧縮性流体では圧力に関して基礎方程式は時間発展形ではないため、MAC法に従い、圧力計算にはつぎの Poisson 方程式を用いる。

$$\Delta p = -\operatorname{div}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + R, \quad R = -\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta D, \quad D = \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (3)$$

3. 一般曲線座標系への変換

基礎方程式を一般曲線座標系に変換することにより、任意形状の物体境界に適合した座標系での数値解析が可能になり、解析プログラムの汎用性が向上するとともに、境界条件の設定も簡単にかつ精度良く実行できるようになる。ここでは、計算格子が時間的に移動・変形する場合の数値解析も可能となるように、次の座標変換を用いる。

$$\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2, x_3, t), \quad \xi_2 = \xi_2(x_1, x_2, x_3, t), \quad \xi_3 = \xi_3(x_1, x_2, x_3, t), \quad \tau = t \quad (4)$$

式(4)より、次のようなメトリックス間の関係式が得られる。

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = \frac{1}{J} \bar{a}_{ij}, \quad J = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k}, \quad \bar{a}_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{imn} \epsilon_{jpq} \frac{\partial x_m}{\partial \xi_p} \frac{\partial x_n}{\partial \xi_q} \quad (5)$$

各添字は 1, 2, 3 をとり、1つの項に同じ添字が2度現れる場合、その添字について総和規約が適用される。

また、 ϵ_{ijk} は交代記号で、 i, j, k が 1, 2, 3 の偶順列のとき 1、奇順列のとき -1、その他の場合は 0 である。

式(2)および(3)を式(5)に従って座標変換すると、一般曲線座標系での基礎方程式として次式が得られる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} + (u_j - \frac{\partial x_j}{\partial \tau}) \bar{a}_{jk} \frac{1}{J} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} = -\bar{a}_{ij} \frac{1}{J} \frac{\partial p}{\partial \xi_j} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \tilde{\Delta} u_i \quad (6)$$

$$\tilde{\Delta} p = \frac{1}{\delta t} (\bar{a}_{ij} \frac{1}{J} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}) - (\bar{a}_{ik} \frac{1}{J} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_k}) (\bar{a}_{jm} \frac{1}{J} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m}) \quad (7)$$

ここで、 $\tilde{\Delta}$ は一般曲線座標系での Laplace 演算子であり、次式で定義される。

$$\tilde{\Delta} = \left[-\bar{a}_{jk} \bar{a}_{jm} \bar{a}_{st} \frac{1}{J^3} \frac{\partial^2 x_s}{\partial \xi_m \partial \xi_t} + \bar{a}_{in} \frac{1}{J^2} \frac{\partial \bar{a}_{ik}}{\partial \xi_n} \right] \frac{\partial}{\partial \xi_k} + \bar{a}_{pq} \bar{a}_{pr} \frac{1}{J^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_q \partial \xi_r} \quad (8)$$

4. 基礎方程式の差分化

数値的な安定性をよくするために、式(8)および(9)を時間積分する際、陰的な Euler スキームを用いた。

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} = -\text{grad } p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}^{n+1} \quad (9)$$

ここで、上式の右辺第2項の対流項は $\mathbf{u}^{n+1}$ について、次のように線形化している。

$$(\mathbf{u}^{n+1} \cdot \Delta) \mathbf{u}^{n+1} \approx (\mathbf{u}^n \cdot \Delta) \mathbf{u}^{n+1} \quad (10)$$

空間的な差分化にあたっては、式(9)の対流項以外は全てに2次精度の中心差分を用いた。また、対流項に対しては、例として次式に示すような3次精度の風上差分 (Kawamura ら, 1986) を用いて差分化を行った。

$$f \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_i \approx f_i \frac{-u_{i+2} + 8(u_{i+1} - u_{i-1}) + u_{i-2}}{12\Delta\xi} + |f_i| \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{4\Delta\xi} \quad (11)$$

式(6)および(7)を、式(9)、(11)等に基づいて差分化した式が、数値計算上の基礎方程式となる。この差分方程式を SOR 法を用いて解き、流体場の時間発展の計算を行う。なお、計算格子には物理量の評価点と差分格子点が一致する通常格子を用いている。

5. 解析結果の一例

一例として、斜め円柱周りの一様流場の解析結果を示す。x-y-z の直交座標系に対して、円柱の軸が、x-z 平面内でz 軸から 30 度傾いた場合の、x 軸方向への一様流れを考えている。このとき、流れ場の代表長さを円柱の直径 D とし、代表速度として主流域の速度を用いている。境界条件は x-y 平面内の外部境界は外挿で与え、円柱表面速度は滑りなしの条件、圧力は外挿により決定した。また、z 軸方向の解析領域を D とし、その上下端の外部境界は周期境界条件を与えている。

Re=10000 の場合の、後流域の x-z 平面内での圧力の等高線図および z/D=0.0, 0.4 および 0.8 の各断面における x-y 平面での流線図をそれぞれ図1および2に示す。一様な流れが、各図の左から右に向かい、傾いた円柱の x-y 断面は短径を D とする楕円形となっている。図2の各断面において、かなり大きな流れのパターンの相違が見られ、剥離点位置および円柱近傍の小さな渦の分布の変化が確認される。図1の円柱後方の圧力分布からも複雑な3次元流れが予想される。なお、結果の詳細や考察等に関しては講演時に発表する予定である。

参考文献)

- Wei.T&Smith.C.R.;1986 Secondary vortices in the wake of circular cylinders. J.Fluid.Mech.. Vol. 169.pp.513-533
 Tatuno.M.&Bearman.;1990 A visual study of the flow around an oscillating circular cylinder at low Keulegan-Carpenter number and Stokes numbers. J.Fluid.Mech. 211.pp157-182
 Kawamura.T&Takami.H.;1986 Computation of high Reynolds number flow around a circular cylinder with surface roughness. Fluid Dynamic Research pp.145-162



図1 : x-z 平面の円柱後方圧力分布



図2 : x-y 断面の円柱近傍の流線 (上; z/D=0.0, 中; 0.4, 下; 0.8)